

Прикладные задачи динамического программирования

БЕЛЫЙ АН
С. А. БЕЛЫЙ

Р. БЕЛЛМАН, С. ДРЕЙФУС

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Перевод с английского

Н. М. МИТРОФАНОВИЧ, А. А. ПЕРВОЗВАНСКОГО,
А. П. ХУСУ, О. В. ШАЛАЕВСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. А. ПЕРВОЗВАНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

6 П 2. 15

Б 43

УДК 62-50

APPLIED DYNAMIC PROGRAMMING

by
RICHARD E. BELLMAN
and
STUART E. DREYFUS

1962
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
PRINCETON, NEW JERSEY

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	12
Предисловие автора	17
Глава I. Одномерные процессы распределения	23
1 Введение	23
2 Описание процесса распределения ресурсов	24
3 Построение математической модели	25
4 Обсуждение	26
5 Аппарат математического анализа	27
6 Трудности	28
7 Заключение	33
8 Анализ чувствительности	34
9 Динамическое программирование	34
10. Функциональные уравнения	35
11 Принцип оптимальности	36
12. Прямой вывод основного функционального уравнения	37
13. Обсуждение	38
14. Вычислительная схема	38
15. Неединственность максимума	41
16. Эффективность динамического программирования по сравнению с прямым перебором	42
17. Какие трудности мы преодолели?	44
18. Блок-схема вычислительного плана для общего про- цесса распределения	46
19. Численные результаты	49
20. Один полезный прием	51
21. Устойчивость	52
22. Процесс загрузки судна	52
23. Математическая постановка задачи	53
24. Обсуждение	53
25. Рекуррентные соотношения	54
26. Обсуждение вычислительной процедуры	55
27. Надежность многокомпонентных схем	57
28. Надежность на основе дублирования компонент	59
29. Математическая модель	60
30. Параллельные операции	61
31. Заключение	62
Комментарии и библиография	63

Глава II. Многомерные процессы распределения	66
1. Введение	66
2. Процесс распределения при наличии двух типов ресурсов	67
3. Рекуррентные соотношения	68
4. Процесс распределения с двумя типами ограничений	68
5. Рекуррентные соотношения	69
6. Вычислительные аспекты	70
7. Обсуждение	70
8. Задача о запасных частях	71
9. Стохастические аспекты	71
10. Подход с точки зрения динамического программирования	71
11. Вычислительная процедура	73
12. Пример	74
13. Множитель Лагранжа	76
14. Геометрическое происхождение	78
15. Множитель Лагранжа в качестве цены	80
16. Применение множителя Лагранжа — I	80
17. Применение множителя Лагранжа — II	82
18. Понижение размерности	82
19. Эквивалентность вариационных задач	83
20. Монотонность по λ	85
21. Применение метода множителей Лагранжа — рекламная кампания	86
22. Метод множителей Лагранжа	88
23. Результаты вычислений	89
24. Вычисление множителей Лагранжа	93
25. Задача с многими уровнями	96
26. Многомерное пространство политик	97
27. Проблема надежности	98
28. Введение множителя Лагранжа	99
29. Численный пример	99
30. Блок-схема программы	101
31. Обобщение	101
32. Транспортная задача Хичкока—Купманса	104
33. Математическая модель транспортного процесса	105
34. Обсуждение	106
35. Подход с точки зрения динамического программирования	107
36. Обсуждение	108
37. Понижение размерности	109
38. Увеличение шага сетки	109
39. Применение множителя Лагранжа к задаче с тремя складами	110
40. Пример I — два склада, десять пунктов потребления	112
41. Блок-схема программы для случая двух складов	114
42. Пример II — три склада, десять пунктов потребления	114
43. Последовательные приближения — I	116
44. Приближение в пространстве политик	117
45. Последовательные приближения — II	119

46. Последовательные приближения — III	121
47. Коэффициенты связи	124
48. Грубая сетка	125
49. Последовательные приближения в задаче Хичкока— Купманса	126
50. Сходимость	127
51. Пример I — относительный минимум	127
52. Пример II — абсолютный минимум	129
53. Стохастическая итерация	133
54. Выводы	134
55. Задачи о «трудной переправе»	134
56. Общая задача	135
57. Функциональные уравнения	135
58. Обсуждение	136
59. Численное решение	137
Комментарии и библиография	138

Глава III. Одномерные процессы сглаживания и составления расписаний

1. Введение	143
2. Процессы сглаживания	144
3. Пример процесса сглаживания	144
4. Математическая постановка задачи	145
5. Функциональные уравнения	146
6. Обсуждение	146
7. Вычислительные аспекты	146
8. Результаты	148
9. Блок-схема	149
10. Несколько графических результатов	149
11. Задачи о ближайшем соседе	149
12. Замена оборудования	156
13. Физический процесс	157
14. Постановка задачи в терминах динамического про- граммирования	157
15. Аналитическое решение	158
16. Технологические усовершенствования	158
17. Формулировка задачи в терминах динамического про- граммирования	160
18. Пример	161
19. Другие постановки задачи	166
20. Задача складирования	169
21. Математическая модель	169
22. Рекуррентные соотношения	170
23. Обсуждение	171
24. Предварительные преобразования	171
25. Аналитическая структура	173
26. Доказательство теоремы	173
27. Обсуждение	175
28. Численный пример	175
29. Выводы	177
30. Задача о поставщике	177

31. Подход с точки зрения динамического программирования — I	178
32. Подход с точки зрения динамического программирования — II	178
33. Аналитическое решение для $q=1, p=2$	180
34. Аналитическое решение для $q=k, p=k+1$	181
35. Аналитическое решение для $q=1, p=3$ (I)	181
36. Аналитическое решение для $q=1, p=3$ (II)	183
37. Аналитическое решение	184
38. Решение, основанное на здравом смысле	184
39. Задача управления запасами	186
40. Обсуждение	188
41. Дальнейшие упрощения	189
42. Планирование производственной линии	190
43. Математическая постановка задачи	191
44. Подход с точки зрения динамического программирования	192
45. Определение оптимальной перестановки	193
46. Пример	194
47. Заключение	195
Комментарии и библиография	196
Глава IV. Методы оптимального поиска	202
1. Введение	202
2. Унимодальные функции	203
3. Одномерный оптимальный процесс нахождения точки максимума	203
4. Числа Фибоначчи	205
5. Золотое сечение	206
6. Дискретный случай	206
7. Нули функций	207
8. Функциональные уравнения	208
9. Частный случай $n=1$	212
10. Случай $n=1, S=0$	213
11. Описание процесса вычислений	215
12. Численный пример — сравнение с вычислительным методом деления отрезка пополам	216
13. Обсуждение	218
14. Задача о фальшивой монете	219
15. Задача с двумя монетами	220
16. Аналитическая постановка задачи	221
17. Значения функции $p(r; s; t)$	223
18. Основное функциональное уравнение	223
19. Вычислительные процедуры	225
20. Рассмотрение с помощью теории информации	230
Комментарии и библиография	232
Глава V. Динамическое программирование и вариационное исчисление	234
1. Введение	234
2. Функционалы	235

3. Формальный аппарат вариационного исчисления	236
4. Необходимые условия	240
5. Естественные граничные условия	240
6. Изопериметрические задачи	241
7. Недостатки вариационного исчисления	241
8. Двухточечные краевые задачи	244
9. Ограничения	245
10. Линейность	247
11. Формальный аппарат динамического программирования	247
12. Основное нелинейное уравнение в частных производных	248
13. Уравнение Эйлера	249
14. Условие Лежандра	250
15. Условие Вейерштрасса	250
16. Случай нескольких зависимых переменных	251
17. Изопериметрическая задача	252
18. Множитель Лагранжа	253
19. Естественные граничные условия	254
20. Условие трансверсальности	254
21. Угловые условия Эрдманна	255
22. Неявные вариационные задачи	255
23. Ограничения в виде неравенств	257
24. Уравнение Гамильтона—Якоби	258
25. Дискретные приближения	260
26. Обсуждение	262
27. Двухточечные краевые задачи	262
28. Двойственность	264
29. Заключение	264
Комментарии и библиография	265
Глава VI. Оптимальные траектории	269
1. Введение	269
2. Упрощенная задача о выборе траектории	270
3. Двойственная задача	272
4. Задача о наборе высоты за минимальное время	272
5. Формулировка в терминах динамического программирования	273
6. Аналитическое решение	274
7. Вычислительная процедура	275
8. Образец расчета	276
9. Обобщенная задача о наборе высоты	281
10. Задача о траектории спутника	282
11. Упрощенная задача	283
12. Математическая формулировка	283
13. Аналитическое решение	285
14. Решение с помощью динамического программирования — I	285
15. Решение с помощью динамического программирования — II	286
16. Вычислительные результаты	287

17. Численные результаты	289
18. Блок-схема	290
19. Новое понятие управления	292
20. Многоступенчатые ракеты	292
21. Задача об оптимальном разделении	293
22. Формулировка	293
23. Задачи более высокой размерности	294
24. Задача о путешествиях	295
25. Вычислительные аспекты	296
26. n -й по краткости путь	297
27. Заключение	298
Комментарии и библиография	298
Глава VII. Многошаговые производственные процессы, использующие промышленные комплексы	302
1. Введение	302
2. Двухотраслевой экономический комплекс	303
3. Математическая модель	304
4. Обсуждение	305
5. Использование динамического программирования	306
6. Исследование вершин	307
7. Уменьшение размерности и диапазона изменения величин	308
8. Техника вычислений	310
9. Стационарный рост	313
Комментарии и библиография	314
Глава VIII. Процессы регулирования с обратной связью	316
1. Введение	316
2. Классическая задача регулирования	317
3. Детерминированные задачи регулирования с обратной связью	318
4. Временное запаздывание	320
5. Формулировка вариационных задач	320
6. Аналитические аспекты	321
7. Дискретный вариант	321
8. Функциональные уравнения	322
9. Задача о релейном управлении	322
10. Выключение ядерного реактора	324
11. Максимальное отклонение	326
12. Максимальная дальность	327
13. Минимум максимального отклонения	328
14. Понижение размерности	329
15. Обсуждение	331
16. Стохастические процессы регулирования	332
17. В чем состоит оптимальная политика?	333
18. Функциональные уравнения	335
19. Вычислительные аспекты	336
20. Корреляция	336
21. Пример (по Аоки)	337
22. Игры против природы	338

23. Процессы с адаптацией	338
24. Адаптивное регулирование с обратной связью	340
25. Вычислительные аспекты	340
26. Теория связи и информации	342
27. Полезность как функция использования	343
28. Формулировка в терминах динамического программирования	343
29. Процесс с адаптацией	344
30. Формулировка в терминах динамического программирования	345
31. Степенной закон	345
32. Логарифмический закон	346
33. Дальнейшие упрощения и численные результаты	346
Комментарии и библиография	349
Глава IX. Численные результаты для процессов регулирования с обратной связью	354
1. Введение	354
2. Дискретный стохастический процесс	354
3. Рекуррентные соотношения	355
4. Выбор параметров	356
5. Обсуждение результатов	357
6. Задача о конечных значениях	358
7. Стохастический вариант	362
8. Процесс с адаптацией	362
Комментарии и библиография	364
Глава X. Линейные уравнения и квадратичные критерии	365
1. Введение	365
2. Задача сглаживания	366
3. Обсуждение	367
4. Более сложная задача сглаживания	368
5. Слабо связанные системы	369
6. Характеристические числа	370
7. Стохастическое сглаживание	372
8. Линейные процессы управления с квадратичными критериями — детерминированный случай	372
9. Стохастический случай	373
10. Понижение размерности	374
11. Линейная теория предсказания	375
12. Детерминированный случай	376
13. Стохастический случай	377
14. Корреляция	377
15. Теория предсказания с адаптацией	378
Комментарии и библиография	379
Глава XI. Марковские процессы решения	381
1. Введение	381
2. Марковские процессы	382
3. Марковский процесс решения	383

4. Пример — задача о такси	384
5. Аналитическая формулировка	386
6. Вычислительные аспекты	386
7. Асимптотическое поведение	387
8. Обсуждение	388
9. Метод Ховарда итерации в пространстве политик	389
10. Операция определения переходных значений	390
11. Процедура улучшения политики	390
12. Решение задачи о такси	391
13. Более общая задача	396
14. Общее решение	397
15. Задачи о замене оборудования в пересмотренной постановке	398
16. Задача о производстве шин	398
17. Формулировка в терминах динамического программирования	399
18. Числовой пример	400
19. Другой пример	401
20. Задача о замене автомашины	402
21. Метод имитирования	410
22. Связь с линейным программированием	410
23. Резюме	410
Комментарии и библиография	411
 Глава XII. Численный анализ	 413
1. Введение	413
2. Трудности, связанные с размерностью	413
3. Полиномиальная аппроксимация	414
4. Ортогональные полиномы	415
5. Гауссовы квадратуры	416
6. Численный пример	417
7. Использование математического анализа	419
8. Устойчивость	420
9. Задача о брахистохроне	420
10. Математическая формулировка	421
11. Вариационное решение	421
12. Постановка задачи в терминах динамического программирования	422
13. Вычислительная процедура	423
14. Численные результаты	424
15. Одна задача с ограничениями	425
16. Аналитическое решение	425
17. Постановка в терминах динамического программирования	426
18. Вычислительная процедура	427
19. Численные результаты	428
20. Аппроксимация кусочно-линейными функциями	428
21. Основное рекуррентное соотношение	429
22. Обобщения	429
Комментарии и библиография	430

Приложение I. Трансцендентная кривая. О. Гросс	431
1. Число точек перегиба	431
2. Необходимое и достаточное условие выпуклости . . .	433
Приложение II. Новый подход к теории двойственности математического программирования С. Дрейфус и М. Фреймер	435
1. Введение	435
2. Двойственная задача линейного программирования . .	435
3. Уравнения Куна—Таккера: квадратичный случай . .	441
4. Уравнения Куна—Таккера: общий случай	443
Библиография	444
Приложение III. Вычислительный метод, основанный на последовательных приближениях в пространстве политик. С. Дрейфус	445
1. Введение	445
2. Задача	446
3. Рекуррентные уравнения	447
4. Способы улучшения	449
Библиография	452
Приложение IV. О новом функциональном преобразовании в анализе: преобразование максимума. Р. Беллман и В. Каруш	453
1. Введение	453
2. Преобразование максимума	454
3. Обратный оператор	455
4. Применение	456
Библиография	457
Приложение V. Счетная машина RAND-Джонниак. С. Дрейфус	458

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Еще два десятилетия тому назад технические и тем более экономические науки носили описательный характер. Проектирование машин, планирование производства велось путем рассмотрения немногих отдельных вариантов, выбираемых из множества объективно возможных на основе технической или экономической интуиции, т. е. в конечном счете на основе прошлого опыта. Некоторые из этих вариантов оказывались практически удачными, другие отпадали.

Подобная процедура «проб и ошибок» и в настоящее время широко распространена. Однако с развитием техники, усложнением структуры производства, усложнением и удорожанием самих проектируемых конструкций начало складываться убеждение в необходимости замены процедуры «проб и ошибок» более эффективной методикой аналитического проектирования и планирования, основанного на выборе наилучшего, оптимального варианта в процессе предварительного математического исследования.

В настоящее время эта проблема оптимизации стала одной из основных проблем в технических и экономических науках. Необходимый для ее решения математический аппарат, казалось бы, имелся в готовом виде — это классический анализ и вариационное исчисление. Однако непосредственное применение известного аппарата столкнулось с значительными трудностями. Реальные задачи оптимизации не укладывались непосредственно в классические схемы, что вызвало к жизни

появление за последние годы целого ряда новых математических исследований.

Среди них важное место занимают работы Р. Беллмана и его сотрудников, результатом которых явилось создание метода динамического программирования.

Предложенный Р. Беллманом аппарат функциональных уравнений значительно расширяет возможности решения реальных проблем оптимизации. Его главным достоинством является хорошая «приспособленность» к использованию современной вычислительной техники.

Изложению метода динамического программирования и его приложений были посвящены уже известные советскому читателю книги: Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960; Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории управления, ИЛ, 1962; Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, Изд-во «Наука», 1964.

Данная книга, впервые появляющаяся в русском переводе, существенно отличается как по содержанию, так и по методическим установкам от ранее вышедших. Ее основной целью (и основным достоинством) является демонстрация приемов, позволяющих довести решение прикладных задач до численных результатов.

Изложение проблем общего характера сопровождается подробным решением достаточно сложных примеров. При этом приводятся блок-схемы вычислительных планов, необходимые для постановки задач на цифровых вычислительных машинах, даются результаты вычислений, а также оценки требуемого машинного времени и объема памяти.

В теоретическом отношении наибольший интерес представляют два момента. Если в предыдущих работах Р. Беллмана динамическое программирование выступало совершенно оторванным от других методов оптимизации, то здесь изложение сопровождается сопоставлением с результатами современного

вариационного исчисления, основанного на использовании не только уравнений Эйлера, но и более сильных и тонких условий (например, условия Вейерштрасса или близкого к нему принципа максимума Понтрягина). Значительное внимание уделяется связи линейного и динамического программирования. Другим важным моментом является подробная разработка в данной книге идеи последовательного приближения в пространстве политик (управлений), позволяющей в значительной мере преодолеть главные практические трудности в применении динамического программирования.

Вместе с тем надо отметить несколько апологетический характер изложения, в ходе которого авторы постоянно настаивают на решительном превосходстве метода динамического программирования над всеми другими методами оптимизации. Читателям, практически работавшим в этой области, конечно известно, насколько эффективным в ряде реальных задач является применение и иных идей, например принципа максимума.

К другим недостаткам книги относятся некоторая небрежность формулировок и нередко встречающиеся неточности в изложении, которые, по-видимому, лишь частично удалось исправить при переводе.

Однако можно быть уверенным, что, несмотря на указанные недостатки, данная книга будет весьма интересной, а главное, полезной для широкого круга читателей.

Перевод книги выполнили: О. В. Шалаевский (гл. I), А. П. Хусу (гл. II, X—XII и приложения), Н. М. Митрофанова (гл. III—V) и А. А. Первозванский (гл. VI—IX). К большинству глав редактором были сделаны дополнительные библиографические указания.

А. Первозванский

Памяти
ДЖОНА ФОН НЕЙМАНА,
вдохновителя и друга

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В период после второй мировой войны стало ясно, что целый ряд интересных и важных видов деятельности можно трактовать как многошаговые процессы решения. Вскоре было обнаружено, что возникающие при их исследовании математические вопросы выходят за обычные границы классического анализа и требуют для своего успешного разрешения новых методов. Классические методы анализа и вариационного исчисления иногда оказывались ценными и полезными и в этих новых областях, однако они были явно ограничены по диапазону и гибкости и определенно недостаточны, когда речь шла о получении численных ответов. Признание этих фактов привело к созданию целого ряда новых математических теорий и методов. Среди них была теория динамического программирования, представляющая собой новый подход, основанный на использовании функциональных уравнений и принципа оптимальности и учитывающий возможности, заложенные в развитии вычислительной техники.

Первой задачей, которую мы ставили себе при разработке теории, было исследование ряда видов деятельности в области техники, экономики, промышленности и в военном деле, с целью выявления круга задач, которые могут быть сформулированы в терминах динамического программирования, а также выяснения уровня их сложности. Это не всегда являлось стандартной операцией, так как при описании процесса оптимизации имеется много способов выбора параметров состояния и критериев. Часто случается, что определенный тип математической модели хорошо приспособлен к определенному же типу аналитического подхода. Вообще три принципиальные стороны математической модели — смысловая, аналитическая и вычислительная — должны рассматриваться в единстве, а не по отдельности. Следовательно, некоторая

доля усилий идет на перевод словесных задач, поставленных в таких неопределенных терминах, как эффективность, возможность, стоимость и т. д., в точные аналитические задачи, требующие решения уравнений и определения экстремумов. Когда подобная переформулировка уже выполнена, важно изучить связь между решениями получаемых функциональных уравнений и оптимальными политиками первоначального процесса решения. Значит, прежде чем переходить к численному решению или структурному анализу, необходимо исследовать вопрос о существовании и единственности решения. К счастью, в ряде важных случаев доказательство существования и единственности осуществляется легко, так что можно с уверенностью приступать к изучению природы оптимальных политик и максимального дохода, используя основные функциональные уравнения.

Сначала мы сосредоточим внимание на тех задачах, которые по своему характеру формулируются как многошаговые процессы решения. Затем мы воспользуемся привилегией математики изучать любой процесс, который можно рассматривать как многошаговый процесс решения. Таким путем мы углубимся в изучение различных разделов вариационного исчисления, в частности, рассмотрим задачи о траекториях и процессы управления с обратной связью. После этого начального периода захвата территории и укрепления на ней мы чувствуем, что настало время выполнить некоторые численные исследования. Хотя с самого начала мы имели в виду именно эту цель и потому постоянно изучали осуществимость наших процедур с этой точки зрения, все же совершенно необходимо провести до конца детальное численное решение. Тот, кто хотя бы даже немного имел дело с вычислительными машинами, скоро начинает относиться с осторожностью к предлагаемым решениям, как бы изящны они ни были. До тех пор, пока каждая отдельная стадия численного решения задачи тщательно не проверена и не апробирована практикой, нельзя быть уверенным, что имеющиеся ограничения по точности и устойчивости, объему памяти или затратам времени не окажутся препятствиями на пути осуществления полного решения.

Кроме того, вскоре выясняется, что никакое решение конкретной задачи не является стандартным. Воспользовавшись индивидуальными структурными особенностями, всегда можно сократить требуемое время, повысить точность, приблизить

модель к реальности без какой-либо дополнительной потери времени и т. д. Теория динамического программирования хорошо приспособлена для учета индивидуальных особенностей конкретных процессов.

В 1955 году мы начали систематическое исследование вычислительной реализуемости динамического программирования. Мы собрали целый ряд задач оптимизации из самых разнообразных областей и различными путями опробовали наши методы.

Цель настоящей книги — показать, что динамическое программирование действительно может быть использовано для решения ряда неприятных вариационных задач и задач оптимизации, интересных и важных для приложений. Некоторые из них лишь с трудом можно было трактовать с помощью других методов, некоторые рассматривались только на основе метода «проб и ошибок» и «научного гадания», а некоторые казались совершенно ускользающими от других методов.

Польза от наличия достаточно стандартизованного аппарата для некоторых больших классов задач из области чистой и прикладной математики велика. Во-первых, мы имеем систематическое средство получения точных числовых ответов на конкретные числовые вопросы в задачах руководства и контроля, составления расписаний и управления запасами. Во-вторых, мы имеем средство получения точных ответов, которые можно использовать в качестве эталона для приближенных результатов, полученных другими, возможно, более простыми и быстрыми путями. Таким образом, мы можем проверять действенность приближенных методов.

При столкновении с новыми классами математических задач, которые не поддаются решению с помощью существующих аналитических средств, крайне важно уметь исследовать классы численных решений в надежде распознать поведение решения. Они могут дать ценный ключ к выяснению аналитической структуры решений и таким образом направить наши исследования в выгодном направлении. В конце концов, математика зарождалась как экспериментальная наука. Если мы не хотим духовно оскудеть подобно иным кабинетным философам, мы должны время от времени, засучив рукава, приниматься за некоторую черную работу. С помощью динамического программирования и вычислительных машин мы можем систематически заниматься математическим экспериментированием.

Заметим, наконец, что во многих случаях нас больше интересует природа оптимальных политик, чем точные числовые значения, которые обращают в максимум или минимум целевую функцию. Точные оптимальные политики для простых процессов решения могут быть использованы для получения простых приближенных политик в более сложных процессах решения.

Опишем теперь вкратце содержание различных глав.

Основное функциональное уравнение динамического программирования имеет вид

$$f(p) = \max_q [H(p, q, f(T(p, q)))]. \quad (1)$$

Предмет может быть подразделен несколькими способами: можно принять за основу точную форму уравнения (1), или тип процесса, приводящего к (1), или же свойство детерминированности, стохастичности или адаптивности и т. д. Для целей численного исследования целесообразно сначала обратить внимание на размерность вектора состояния p . В главе I мы рассматриваем некоторые простые процессы, приводящие к последовательностям функций от одной переменной, с целью подвести читателя как к основным идеям динамического программирования, так и к стандартным вычислительным методам, которые будут неоднократно применяться в дальнейшем.

Обладая необходимыми предварительными сведениями, мы рассматриваем в главе II некоторые интересные задачи, приводящие к последовательностям функций от двух переменных. После обсуждения трудностей, связанных с размерностью, которые начинают явно вырисовываться на горизонте, мы показываем, как в ряде случаев их можно смягчить с помощью множителей Лагранжа.

В главе III мы сосредоточиваем наши усилия на основном предмете книги и даем некоторые аналитические и численные решения для различных классов процессов сглаживания и составления расписаний.

Глава IV посвящена исследованию задач динамического программирования, которые возникают в ходе численного решения самих задач динамического программирования. Уравнение (1) требует определения максимума по q . Поскольку по ряду причин, указанных далее в тексте, нежелательно

использование методов классического анализа, мы должны будем прибегнуть к процессу поиска для определения максимизирующего значения q . В некоторых случаях можно выдержать процесс прямого перебора; в других же случаях существенно использовать секвенциальный *) метод. Глава является введением в эту очень трудную и увлекательную область.

До сих пор речь шла о дискретных во времени процессах. В главе V показано, как теория динамического программирования может быть использована для получения очень простой трактовки вариационных задач, содержащих функции от одной независимой переменной. Принцип оптимальности приводит к нелинейному уравнению в частных производных, из которого быстро получаются все классические результаты.

В главе VI мы переходим к одному из наиболее интересных современных приложений динамического программирования — определению оптимальных траекторий. Рассматриваются конкретные задачи и даются их численные решения.

Следующая глава VII является кратким экскурсом в область математической экономики. Используя модель затрат-выпуска, ставшую знаменитой благодаря работе Леонтьева, мы рассматриваем оптимальную эксплуатацию комплекса взаимосвязанных отраслей производства.

В главах VIII и IX рассматриваются различные аспекты быстро развивающейся теории процессов управления. Первая из этих глав посвящена рассмотрению различных типов детерминированных стохастических и адаптивных процессов; вторая следует работе Масанао Аоки и посвящена некоторым вычислительным результатам.

Глава X представляет собой краткое введение в очень интересное и благодарное исследование процессов оптимизации, связанных с линейными уравнениями и квадратичными критериями. Эти результаты важны не только сами по себе, но также и благодаря возможности их использования при решении более сложных задач методом последовательных приближений.

Далее мы рассматриваем несколько подробнее марковские процессы решения и даем ряд применений. Некоторые важные части этой главы основаны на работе Р. Говарда.

*) То есть метод последовательного многошагового поиска, в котором на каждом шаге используется информация, полученная на предыдущих шагах. (Прим. ред.)

Последняя глава посвящена некоторым предварительным результатам по точности и устойчивости метода динамического программирования. Эта область исследования относительно мало разработана и многие важные задачи остаются здесь неисследованными.

В конце текста помещены четыре приложения, содержащие более подробные результаты, а также некоторые более поздние результаты, полученные О. Гроссом, М. Фреймером и В. Карушем в сотрудничестве с различными авторами. Пятое приложение содержит описание вычислительной машины RAND-Джонниак, использованной нами при вычислениях.

Насколько это было возможно, мы старались сделать книгу самостоятельной. Читатель, желающий познакомиться с более глубоким обоснованием динамического программирования, может посмотреть книгу Р. Беллмана «Динамическое программирование», М., ИЛ, 1960; детальное рассмотрение современной теории процессов управления можно найти в книге Р. Беллмана «Процессы регулирования с адаптацией» (изд-во «Наука», 1964). Многочисленные ссылки на применения и оригинальные научные статьи можно найти в конце глав. Желающим познакомиться с обширной библиографией мы рекомендуем книгу: V. Riley and S. Gass, Linear Programming and Associated Techniques. Operations Research Office, Johns Hopkins Press, 1958.

Ряд приведенных результатов получен в сотрудничестве с другими математиками или же основан на их индивидуальных усилиях. За использование этих исследований мы приносим, в частности, благодарность М. Аоки, Т. Картано, М. Фреймеру, О. Гроссу, Р. Говарду, С. Джонсону, Р. Калаба и В. Карушу.

Помещенные в книге математические результаты были получены в процессе исследований, выполненных в корпорации RAND по широкой программе научных изысканий для военно-воздушных сил Соединенных Штатов. Нам хотелось бы выразить благодарность за возможности, предоставленные нам этой программой.

*Ричард Беллман,
Стюарт Дрейфус*

Корпорация RAND
Санта Моника,
июль 1961

ГЛАВА I

ОДНОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы начинаем изложение с изучения простого класса процессов распределения, встречающихся в математической экономике и исследовании операций. Основная задача состоит в эффективном использовании ресурсов различных типов. Для того чтобы облегчить читателю усвоение методов, которые мы примем на вооружение, рассмотрим сначала несколько элементарных моделей, приводящих к минимальным математическим трудностям.

Простота этих вводных задач позволит нам опробовать и проанализировать методы, которые будут использованы впоследствии для исследования более реальных и сложных схем. Как мы увидим, все важные для приложений процессы обладают целым рядом неприятных особенностей и, вообще говоря, требуют различных методов, применяемых в сочетании друг с другом, а также ловкости и изобретательности. Все наши усилия будут направлены на достижение главной цели — получения численных решений для конкретных задач.

Первые вычисления, которые мы производим, относятся к определению максимума функции N переменных

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (1.1)$$

в области значений, задаваемой соотношениями

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \\ \text{б)} \quad x_i \geq 0. \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Существует много трудностей, которые возникают при рассмотрении этой, на первый взгляд, простой и ясной задачи. В ходе тщательного и обстоятельного обсуждения этих препятствий мы обнаружим достаточные основания для введения нового подхода — метода функциональных уравнений динамического программирования.

Для введения в круг основных идей динамического программирования и дегального выяснения вычислительных аспектов будет использован пример процесса распределения ресурсов, связанный с задачей оптимизации указанного вида. При этом повсюду мы будем уделять внимание основным сведениям, касающимся времени кодирования, рабочего времени, точности, устойчивости и вычислительных планов, представляемых в виде блок-схем.

Мы рассмотрим еще две задачи, приводящие к аналогичным вопросам аналогичного типа. Источником одной из них служит процесс загрузки судов, другая связана с надежностью многокомпонентных схем.

2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Прежде чем привести аналитическую формулировку, дадим чисто словесное описание класса процессов, которые мы намерены изучать. Допустим, что мы располагаем некоторым количеством экономических *ресурсов*. Под этим абстрактным термином могут скрываться люди, деньги, машины, расщепляющийся материал для ядерных реакторов, вода для сельскохозяйственных и промышленных целей или для производства электроэнергии, топливо для космического корабля и т. д. Столкновение интересов объясняется тем, что ресурсы можно употребить многими различными способами. Каждый такой возможный способ мы называем технологическим *процессом*, или производственным *способом*.

В результате употребления всех ресурсов или их части в каком-либо отдельном процессе мы получаем некоторый *доход*. В одних случаях доход может быть оценен в единицах самих ресурсов (деньги могут снова приносить деньги, машины могут снова производить машины); в других — он может быть измерен в единицах совершенно отличной природы (топливо может давать скорость, деньги могут обеспечивать надежность) и т. д. Размер дохода зависит как от

употребленного количества ресурсов, так и от выбранного процесса.

Сделаем следующие основные предположения.

а) Доходы, полученные от различных процессов, могут быть измерены общей единицей.

б) Доход, полученный от любого данного процесса, не зависит от того, какие количества ресурсов были выделены для других процессов.

с) Общий доход может быть определен как сумма доходов, полученных от отдельных процессов.

На экономическом языке это означает, что полезность, полученная от процесса распределения в целом, может быть вычислена простым сложением полезностей, полученных от отдельных процессов.

Основная задача — разделить наши ресурсы так, чтобы максимизировать общий доход. Описанная простая математическая модель процесса распределения ресурсов является полезной для описания многих ситуаций.

3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Дадим теперь точную математическую формулировку описанной задачи. Пусть N различных процессов занумерованы в определенном порядке числами $1, 2, \dots, N$. Когда мы говорим, что рассматриваются два процесса, мы будем иметь в виду процессы 1 и 2; когда называется пять процессов, мы будем иметь в виду процессы 1, 2, 3, 4, 5, и т. д. Порядок нумерации процессов значения не имеет, но, будучи однажды принятым, он должен твердо сохраняться впредь.

Каждому процессу соответствует функция полезности. Эта функция выражает зависимость дохода при этом процессе от количества выделенных для него ресурсов. Если x_i обозначает количество ресурсов, выделенных для i -го процесса, то через $g_i(x_i)$ мы обозначим соответствующий доход от этого процесса. Функция полезности $g_i(x_i)$ представлена на рис. 1. Форма этой кривой определяется двумя важными экономическими условиями. Во-первых, небольшие количества выделенных ресурсов, в сущности, не дают никаких доходов и, во-вторых, дальнейшее увеличение этих количеств приводит, в конце концов, к эффекту насыщения («закон

убывания доходов»). Как уже говорилось, x_i и $g_i(x_i)$ часто выражаются в разных единицах.

Предположения, касающиеся независимости процессов и аддитивности полезностей, приводят к выражению

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (1.3)$$

для общей полезности процесса распределения.

Задача максимизации возникает оттого, что в наличии обычно имеется лишь ограниченное количество ресурсов.

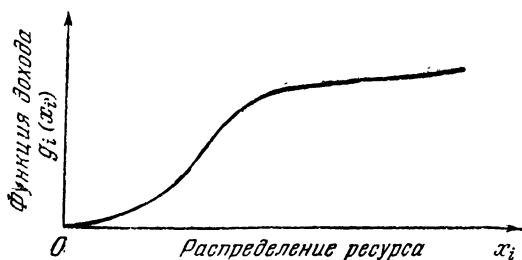


Рис. 1.

Обозначая это количество через x , мы приходим к условию.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad (1.4)$$

где $x_i \geq 0$. Далее нужно максимизировать функцию $R(x_1, x_2, \dots, x_N)$ при x_i , удовлетворяющих этим ограничениям.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Отметим попутно, что одна из наиболее значительных трудностей, встречающихся при всяком изучении экономических, промышленных или военных процессов, связана с определением индивидуальных и совокупных функций полезности. Во многих ситуациях мы не знаем ни точного вида этих функций, ни даже того, что именно следует максимизировать. В частности, это всегда характерно для процессов с существенным участием людей. Весьма полезным в целом ряде исследований этого рода оказывается моделирование процессов.

5. АППАРАТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Для решения экстремальных задач описанного типа часто применяется аппарат математического анализа. Вводя множитель Лагранжа *) λ , мы образуем вспомогательную функцию

$$S(x_1, x_2, \dots, x_N) = \\ = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) - \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_N) \quad (1.5)$$

и приравниваем нулю ее частные производные. Этим путем получают уравнения

$$g'_i(x_i) - \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

Разрешая их относительно x_i , $x_i = h_i(\lambda)$, мы находим λ из условия (1.4)

$$h_1(\lambda) + h_2(\lambda) + \dots + h_N(\lambda) = x. \quad (1.7)$$

Таковы обычные действия для определения максимума R .

Например, если требуется минимизировать функцию

$$R = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_N x_N^2, \quad a_i > 0 \quad (1.8)$$

при $x_i \geq 0$, удовлетворяющих (1.4), формула (1.6) дает:

$$x_i = \frac{\lambda}{2a_i}. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.7) тогда будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{\lambda}{2a_i} = x, \quad (1.10)$$

откуда

$$\lambda = \frac{x}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2a_i}}, \quad (1.11)$$

$$x_i = \frac{x \cdot 2a_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2a_i}}.$$

*) Особое внимание будет уделено множителям Лагранжа в главе II (§ 13 и следующие за ним), где этот классический метод будет сочетаться с динамическим программированием.

Таким образом, минимальное значение равно

$$\frac{x^2}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{a_i} \quad (1.12)$$

Этот пример задачи и ее решения типичен для учебников по математическому анализу. К несчастью, задачи, возникающие в сколько-нибудь важных приложениях, часто менее всего подходят под установившиеся методы и требуют более тонкого исследования.

Впрочем, небезынтересно, что большая часть примеров, употребляемых для иллюстрации мощи аппарата математического анализа, в том числе и пример, данный выше, вовсе не нуждается в этом аппарате и может быть решена более строго и эффективно с помощью гораздо более элементарной теории неравенств.

6. ТРУДНОСТИ

Рассмотрим теперь несколько подробнее те принципиальные трудности, с которыми мы сталкиваемся, когда пытаемся применить методы математического анализа к задаче распределения ресурсов, описанной в §§ 2 и 3.

А. Относительный экстремум. То, что тангенс угла наклона касательной к кривой равен нулю в точке относительного максимума или в точке относительного минимума, позволяет думать об использовании математического анализа для решения задач оптимизации (рис. 2).

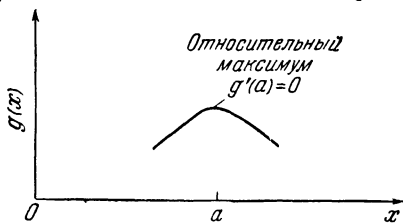


Рис. 2.

Соответствующий результат имеет место и для функций нескольких пе-

ременных, если рассматривать не касательную к кривой, а касательную к поверхности плоскость.

К сожалению, обращение в нуль производной есть только необходимое, но не достаточное условие для внутреннего экстремума. Производная равна нулю не только во всех

внутренних экстремальных точках, она может быть также равна нулю и в других внутренних точках — точках перегиба.

Например, для кривой, изображенной на рис. 3, производная $g'(x)$ равна нулю в точках b_1 и b_2 относительного максимума, в точках a_1 и a_2 относительного минимума и в точке c_1 , которая является точкой перегиба.

Это обстоятельство, причиняющее неудобства уже при исследовании функций одной переменной, становится почти непреодолимой преградой для успешного применения математического анализа в многомерных задачах максимизации, особенно, когда число независимых переменных велико.

Рассмотрим здесь задачу максимизации функции (1.5), когда каждая функция $g_i(x)$ имеет вид, показанный на рис. 1. В этом случае каждое из уравнений (1.6) может

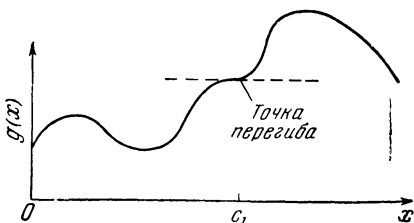


Рис. 3.

иметь два корня. Так как не ясно, какой корень соответствует абсолютному максимуму, мы должны испытать все комбинации значений. Эта процедура требует оценки 2^N случаев. Если $N=10$, то имеем 1024 случая, что не так уже велико; если $N=20$, число случаев превысит 10^6 и должно внушать известное уважение.

Функции полезности еще более сложной природы будут давать гораздо большие наборы возможностей, что создает не только теоретическую трудность, но и серьезное препятствие для численного решения.

Б. Ограничения. Мы применили традиционным образом метод классического анализа, не уделив внимания тому факту, что в действительности во многих ситуациях мы должны разыскивать максимум в некоторой конечной области. Равенство производных нулю, как мы знаем, определяет внутренний экстремум, но вообще не служит признаком экстремума, который достигается на границах области изменения. В качестве примера возьмем функцию одной переменной $g(x)$, приведенную на рис. 4. Производная $g'(x)$ равна нулю при a_1 и b_1 в точках относительного минимума и максимума соответственно, но не равна нулю при $x=0$

в точке, где $g(x)$ принимает свой абсолютный максимум в интервале $[0, x_0]$. Как ни печально, это осложнение является обычным в изучении экономических и технических управляемых процессов, для которых условия вида

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (1.13)$$

естественны и разумны. В задачах максимизации с многими переменными число всех возможностей, включающих точки относительного экстремума, стационарные точки более слож-

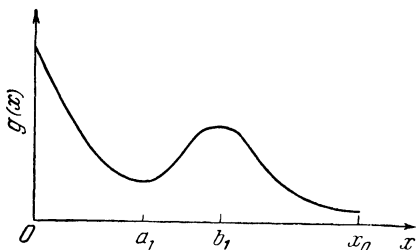


Рис. 4.

ной природы и точки границы, настолько велико, что приходится отвергнуть саму идею перебора.

Важно понимать, что в задачах оптимизации, которые сводятся к комбинаторным задачам, требующим оценки каждого случая в отдельности, общее число случаев, как

правило, возрастает экспоненциально или даже быстрее с ростом числа измерений. Если, например, общее число всех случаев 2^N , мы отнюдь не удваиваем вычислительное время, когда переходим от N к $2N$, скорее мы совершенно меняем его порядок. Об этом специально пойдет речь в § 16.

С другой стороны, подобное увеличение времени может быть только помехой. Потратить на вычисления 100 минут вместо 10 нетрудно, если ответ имеет хоть какое-нибудь значение. Однако необходимость посвятить вычислительному решению 100 часов вместо 10 может поставить перед дилеммой: придерживаться ли данной важной линии исследования или отказаться от нее в пользу направления, допускающего более легкое продвижение. Сегодня, как никогда раньше в истории науки, характер теоретической постановки стремится идти рука об руку с вычислительной осуществимостью.

В. Максимизация по дискретным множествам. Аппарат классического анализа приспособлен к решению задач оптимизации с непрерывным изменением независимых переменных. Вообще разумно использовать этот тип изменения в качестве приближения к реальной действительности. Однако в ряде случаев подобное сглаживание оказы-

вает серьезное влияние на точность решения. Один из крайних случаев возникает, когда каждая переменная может принимать только два различных значения, 0 или 1.

Обычно посредством того или иного искусного приема непрерывное изменение ввести можно. Оптимизация же по дискретным множествам в основном требует новых методов, и в настоящее время много важных классов задач находится целиком вне нашей досягаемости.

Г. Непрерывные функции. Как известно, существуют непрерывные функции, определенные на некотором интервале, которые не имеют производной ни в одной

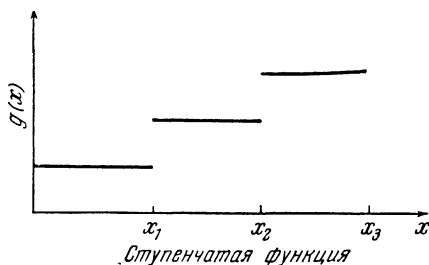


Рис. 5.

точке этого интервала. Конечно, мы не рассчитываем встретить какие-либо функции такой природы в ходе физического исследования. Всякий раз, когда в нашем воображении явно возникают эти пугающие призраки, более тщательное изучение всегда показывает, что «патология» появилась вследствие некоторых предположений, лишенных физического смысла.

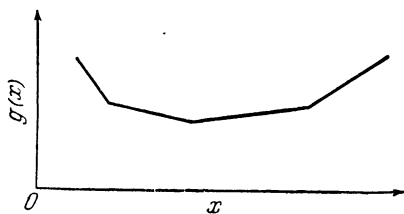


Рис. 6.

Тем не менее вполне можно встретить функции, несущие различные несущественные неудобства и помехи, такие как отсутствие непрерывности в конечном множестве

точек или односторонние производные. Ступенчатые функции (рис. 5) являются простейшими среди них и в качестве таковых служат полезными приближениями более гладких, но гораздо более сложных функций.

Другой интересный и полезный класс функций образуют кусочно-линейные функции, задаваемые следующими выражениями (рис. 6):

$$g(x) = \max(a_1x + b_1, a_2x + b_2, \dots, a_kx + b_k). \quad (1.14)$$

Работая с функциями этого типа, мы можем брать производные при условии, что мы знаем интересующий нас интервал. Если этот факт неизвестен, мы сталкиваемся с многими неприятными чертами задач комбинаторного поиска, уже упоминавшимися ранее. Весьма часто определение места особенностей составляет существенную часть решения.

Д. **Линейность.** Трудности противоположного характера сопутствуют задачам, в которых все встречающиеся функции линейны.¹ В этом случае все производные существуют, но дают небольшую информацию, так как а priori известно, что экстремумы достигаются в граничных точках области изменения. Теория линейных неравенств со своим отвлечением, линейным программированием, специально предназначается для изучения задачи максимизации линейной формы

$$L_N = \sum_{i=1}^N c_i x_i \quad (1.15)$$

при условиях $x_i \geq 0$ и

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.16)$$

Этот универсальный инструмент уделяет незначительное внимание конкретной структуре исследуемого процесса. Поэтому в определенных ситуациях можно надеяться найти гораздо более эффективные методы для решения соответствующих задач оптимизации, и это действительно так.

Е. **Устойчивость.** Выше мы указали, что классический анализ основывается на непрерывном изменении независимых переменных. Отсюда следует, что результаты, полученные классическим путем, весьма чувствительны к локальным изменениям и, следовательно, к малым ошибкам.

Рассмотрим две функции $g(x)$ и $h(x)$, показанные на рис. 7 и 8; первая — идеализированная «математическая» функция и вторая — «физическая» функция. Смысл рис. 8 следующий. Если $h(x)$ определяется как результат измерений или вычислений, то ее значение в каждой точке x никогда не равно числу $h(x)$, так как обладает рассеянием значений.

Следовательно, если даже мы и станем определять значения $h(x)$ с высокой степенью точности, касательное направление в любой данной точке мы будем назначать весьма неохотно.

Таким образом, мы не намерены полагаться на методы оптимизации, требующие дифференцирования.

На самом деле, конечно, мы хотим использовать метод, который гарантирует, что ошибка в ответе будет не большего порядка, чем ошибка в начальных данных. Это и есть то, что мы подразумеваем под *устойчивостью*.

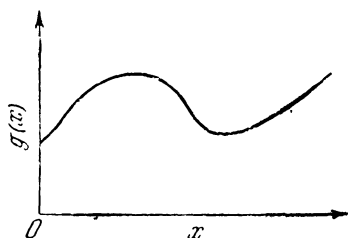


Рис. 7.

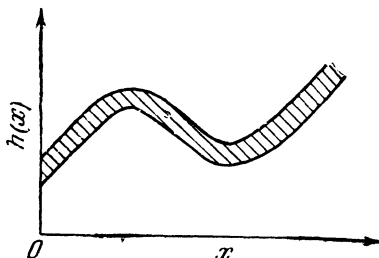


Рис. 8.

Исследование устойчивости вычислительных алгоритмов занимает одно из основных мест в современной теории численного анализа. Это очень трудный путь. Трудности велики, в частности, оттого, что до сих пор отчетливо не осознается тесная связь вычислительной устойчивости с первоначальным математическим выражением физического процесса. Следовательно, многие численные исследования необычайно усложняются физически малосодержательными деталями исходной математической модели.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предыдущие рассуждения приводят нас к заключению, что такой мощный аппарат, каким является математический анализ, не всегда приводит к успеху при рассмотрении задач оптимизации. В некоторых случаях он совершенно неприменим, а в других случаях его некритическое применение может дать неверные результаты. Если мы хотим гарантировать численное решение для простой задачи распределения, поставленной выше, мы должны ввести какие-то новые математические методы.

8. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Как следует оценивать полезность вычислительной схемы? Одним из подходов является следующий. Пусть требуется повторно произвести вычисления того же самого типа, но для других значений основных параметров. Можем ли мы при этом использовать информацию, полученную от первоначальных вычислений, или же каждый раз мы должны продвигать все вычисления с самого начала? Если для любого множества параметров нужно выполнить все новые вычисления, то получение желаемой информации в полном объеме становится крайне дорогостоящим предприятием.

Все сказанное тесно связано с понятием *анализа чувствительности*. В большинстве случаев при исследовании данной физической системы мы не довольствуемся определением оптимального поведения системы для какого-либо одного множества значений параметров. Нас не оставляет желание позволить параметрам изменяться в некоторой критической области значений и затем наблюдать, насколько оптимальное поведение затрагивается этими изменениями. Именно отмечая изменение в структуре линий поведения вследствие изменения в параметрах, мы и добываем наиболее существенную информацию. Эта мысль неизменно обитает в интеллектуальной сфере и объясняет успех сравнительной анатомии, сравнительной филологии, сравнительной религии и т. д.

9. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Высказанные идеи оформляются явным образом в теории динамического программирования. Мы начнем с рассмотрения некоторых простых задач для того, чтобы по возможности яснее проиллюстрировать как смысловую, так и вычислительную стороны.

Как будет показано, метод функциональных уравнений преодолевает все трудности, зафиксированные ранее, по крайней мере в отношении одномерных процессов распределения. Почему возникают трудности при рассмотрении более сложных процессов, в чем они состоят и что можно сделать, чтобы их обойти, — всего этого мы коснемся в последующих главах.

Вместе с тем мы можем ободрить читателя откровенным признанием, что мы никоим образом не преодолеем и не обойдем абсолютно всех возникающих трудностей. Таким образом, имеются достаточно благоприятные возможности для исследования приложения этих новых методов.

10. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для того чтобы исследовать конкретную задачу максимизации функции

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (1.17)$$

в области $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N x_i = x$, мы погружаем ее в некоторое семейство процессов распределения. Вместо рассмотрения одной задачи с данным количеством ресурсов и фиксированным числом процессов мы рассматриваем целое семейство таких задач, в которых x может принимать любые положительные значения и N может принимать любые целые значения.

То, что на первый взгляд, по-видимому, может показаться статическим процессом, мы искусственно развертываем во времени, допуская, а в действительности требуя, производить распределения ресурсов в каждую единицу времени. Сначала какое-то количество ресурсов назначается N -му процессу, затем $(N-1)$ -му и т. д. Поступая таким образом, мы вводим динамический процесс распределения.

Перейдем теперь к аналитическому рассмотрению. Так как максимум $R(x_1, x_2, \dots, x_N)$ в указанной области зависит от x и N , мы сделаем эту зависимость явной, задав последовательность функций $\{f_N(x)\}$, определенных для $N=1, 2, \dots$, $x \geq 0$, следующим образом:

$$f_N(x) = \max_{\{x_i\}} R(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (1.18)$$

где $x_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^N x_i = x$.

Функция $f_N(x)$ выражает оптимальный доход, получаемый от распределения количества ресурсов x по N процессам. В двух частных случаях элементы последовательности

$\{f_N(x)\}$ принимают особенно простой вид. Очевидно,

$$f_N(0) = 0, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

если $g_i(0) = 0$ для любого i , что является **разумным** предположением. Также, очевидно,

$$f_1(x) = g_1(x) \quad (1.20)$$

для $x \geq 0$.

Легко найти рекуррентное соотношение, связывающее $f_N(x)$ и $f_{N-1}(x)$ для произвольных N и x . Пусть x_N , $0 \leq x_N \leq x$, — количество ресурсов, назначенное для N -го процесса. Тогда, каково бы ни было точное значение x_N , мы знаем, что остающееся количество ресурсов $x - x_N$ будет использовано так, чтобы получить максимальный доход от остающихся $N - 1$ процессов.

Так как этот оптимальный доход от распределения количества ресурсов $x - x_N$ по $N - 1$ процессам по определению есть $f_{N-1}(x - x_N)$, назначение x_N для N -го процесса приводит к общему доходу

$$g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \quad (1.21)$$

для модели с N процессами.

Ясно, что оптимальным будет такой выбор x_N , который максимизирует эту функцию. Таким образом, мы получаем основное функциональное уравнение:

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)] \quad (1.22)$$

для $N = 2, 3, \dots$, $x \geq 0$, причем $f_1(x)$ определяется согласно (1.20).

11. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

В ходе предшествующего изложения мы применили очень общий метод, известный под названием принципа оптимальности.

Принцип оптимальности. Оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальные

состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Вся наша дальнейшая работа будет основана на применении этого простого свойства многошаговых процессов решения. В этом частном случае принцип без труда устанавливается путем соединения индукции и доказательства от противного.

12. ПРЯМОЙ ВЫВОД ОСНОВНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для тех, кто поначалу не склонен доверять принципу оптимальности, дадим следующий вывод (1.22). Замечая, что

$$\max_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_N=x \\ x_i \geq 0}} = \max_{0 \leq x_N \leq x} \left[\max_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_{N-1}=x-x_N \\ x_i \geq 0}} \right], \quad (1.23)$$

мы можем написать цепочку равенств

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \max_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_N=x \\ x_i \geq 0}} [g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + \\ &\quad + \dots + g_1(x_1)] = \\ &= \max_{0 \leq x_N \leq x} \left[\max_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_{N-1}=x-x_N \\ x_i \geq 0}} (g_N(x_N) + \right. \\ &\quad \left. + g_{N-1}(x_{N-1}) + \dots + g_1(x_1)) \right] = \\ &= \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + \\ &\quad + \max_{\substack{x_1+x_2+\dots+x_{N-1}=x-x_N \\ x_i \geq 0}} (g_{N-1}(x_{N-1}) + \dots + g_1(x_1))] = \\ &= \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)], \end{aligned}$$

что и дает требуемый результат.

13. ОБСУЖДЕНИЕ

Рекуррентное соотношение (1.22) дает теоретический метод для индуктивного получения последовательности $\{f_N(x)\}$, если только $f_1(x)$ известна. Действительно, $f_1(x)$ определяет $f_2(x)$ и т. д. Важный вопрос, который мы должны поставить в первую очередь, заключается в оценке выполнимости нового метода; затем нужно установить, преодолевает ли он затруднения, на которые наталкиваются обычные методы.

Как мы увидим, новый метод является гибким и действенным. Его силу мы продемонстрируем на примерах. Известный опыт позволяет, таким образом, утверждать, что метод динамического программирования дает быстрое, простое и правильное решение общей задачи, поставленной в § 3.

14. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Рассмотрим теперь внимательно вычислительную сторону использования рекуррентного соотношения (1.22) для определения последовательности $\{f_N(x)\}$. Хотя вначале мы будем обсуждать совсем наивные и прямые методы, впоследствии мы изложим ряд более тонких подходов.

Так как мы отказались от классического анализа и тем самым от аналитических представлений, мы должны сначала уяснить, что значит знать функции $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, и что значит вычислять элементы последовательности $\{f_N(x)\}$.

Под функцией, определенной при $x \geq 0$, например под $g_i(x)$ или $f_i(x)$, мы будем понимать множество значений, принимаемых, когда x пробегает все неотрицательные значения. Это — обычное определение. Разумеется, невозможно протабулировать все значения функции и даже достаточно большое конечное множество значений. Следовательно, остается использовать какой-нибудь тип интерполяционной схемы, которая позволит нам восстанавливать общее значение, исходя из немногих аккуратно выбранных значений.

Искажение, связанное с выбором значений, которые мы будем табулировать, чтобы изобразить функцию, очень мало. Практический опыт, требования к памяти и точности, наконец, стоимость вычислений играют важную роль при этом выборе. Первоначально мы рассмотрим одну простую и очевидную идею, а позже обсудим более совершенный метод.

Чтобы задать в интервале $[0, x_0]$ все множество значений $f_N(x)$, воспользуемся значениями, принимаемыми в конечном числе точек решетки

$$x = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta = x_0. \quad (1.24)$$

Затем постулируем, что каждый элемент последовательности $\{f_N(x)\}$ вычисляется и табулируется в каждой из этих точек и только в этих точках.

Значения $f_N(x)$ для x , отличных от точек решетки, будут получаться интерполяцией. Тип используемой интерполяции будет зависеть от точности, которая требуется, и от времени, необходимого для достижения этой точности. Если

$$k\Delta < x < (k+1)\Delta, \quad (1.25)$$

то простейшее приближенное значение $f_N(x)$ получается в виде

$$f_N(x) = f_N(k\Delta). \quad (1.26)$$

Следующее простейшее приближение доставляется линейной интерполяционной формулой

$$f_N(x) = f_N(k\Delta) + (x - k\Delta) \frac{f_N((k+1)\Delta) - f_N(k\Delta)}{\Delta}. \quad (1.27)$$

В нужных случаях можно использовать более точные интерполяционные формулы, основанные на полиномах более высокой степени.

В задаче распределения, сформулированной выше, вполне разумно разрешить переменную x_N изменяться на том же самом множестве точек, на котором изменяется x . Поэтому в процессе максимизации x_N может принимать только значения, указанные в (1.24).

Максимизация в (1.22) выполняется путем непосредственного перебора случаев и сравнения величин без каких-либо услуг со стороны обычного анализа. В последующих главах мы обсудим методы, которые нередко дают громадное упрощение процедуры поиска и, следовательно, большую экономию вычислительного времени. В данный момент, однако, мы исследуем общий случай, в котором рассматриваемые функции не обладают той особой структурой, которая может быть использована для облегчения поиска.

Обсудим наши действия более обстоятельно. Когда $N=1$, функция $f_1(x)$ немедленно определяется равенством

$$f_1(x) = g_1(x). \quad (1.28)$$

Множество значений $\{f_1(k\Delta)\}$, $k=0, 1, \dots, R$, с этого момента хранится в памяти вычислительной машины*), и мы в состоянии вычислить $f_2(x)$ с помощью условия (1.22) для $N=2$, именно:

$$f_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [g_2(x_2) + f_1(x - x_2)], \quad (1.29)$$

где x принимает только значения $0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta$. Так как никакой процесс перебора не может осуществить максимизацию на непрерывной области значений, мы должны заменить отрезок $[0, x]$ дискретным множеством. Тогда соотношение (1.29) заменится аппроксимирующим соотношением

$$f_2(x) = \max_{\{k=0, 1, \dots, R\}} [g_2(k\Delta) + f_1(x - k\Delta)]. \quad (1.30)$$

Функция $g_2(x)$ в виде последовательности $\{g_2(k\Delta)\}$ также хранится в памяти вычислительной машины. Процесс максимизации начинается с того, что машина вычисляет величины $g_2(0) + f_1(x)$ и $g_2(\Delta) + f_1(x - \Delta)$ и затем сравнивает их, удерживая большую в памяти. Далее вычисляется $g_2(2\Delta) + f_1(x - 2\Delta)$ и сравнивается с большей из этих величин. Новую большую величину снова сохраняем в памяти, и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока k не примет все допустимые значения. В результате мы получим $f_2(x)$ для данного значения x .

В ходе этого процесса поиска вычислительная машина определяет не только значения $f_2(x)$ при $x=0, \Delta, \dots, R\Delta$, но также значение (или значения) x_2 , при котором в (1.29) достигается максимум. Предположим пока, что абсолютный максимум принимается только при одном значении x . Общий случай мы обсудим ниже.

Так как это единственное значение будет зависеть от x , обозначим его $x_2(x)$. Вычислительная машина запоминает как $x_2(x)$, так и $f_2(x)$ для каждого x .

*) Если не оговорено противное, «память» будет отождествляться с «быстродействующей памятью» (оперативной памятью).

В итоге после двух шагов этого процесса мы можем заполнить таблицу, подобную таблице 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

x	$f_1(x)$	$x_1(x)$	$f_2(x)$	$x_2(x)$
0	—	—	—	—
Δ	—	—	—	—
2Δ	—	—	—	—
—	—	—	—	—
$R\Delta$	—	—	—	—

В этом случае $f_1(x) = g_1(x)$ и $x_1(x) = x$.

Указанная таблица дает решение двухшаговой задачи максимизации в следующем смысле. Если задано частное значение x , мы просматриваем столбец значений $x_2(x)$ до тех пор, пока не наткнемся на соответствующее значение x_2 . Как только это значение найдено, мы приходим к задаче определения оптимального распределения в одношаговом процессе с ресурсами $x - x_2(x)$.

Вся эта операция поиска может быть, конечно, проделана самой вычислительной машиной. Продолжая процесс N шагов, можно получить решение или в виде аналогичной таблицы, или даже в виде выборов $x_N, x_{N-1}, \dots, x_2, x_1$, связанных с каждым значением x .

15. НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ МАКСИМУМА

Числа, хранящиеся в памяти машины, обычно верны до десяти или более значащих десятичных цифр в зависимости от того, что требуется. Поэтому крайне маловероятно, что два значения x_2 когда-либо дадут одно и то же максимальное значение. Тем не менее реальный процесс решения может обладать несколькими оптимальными поведением, исключаящими друг друга. В некоторых случаях нам необходимо знать лишь максимальный доход и одно из оптимальных поведений; в других случаях очень нужны все оптимальные поведения, и мы можем расценивать этот результат более высоко, чем определение собственно максимального дохода.

Кроме того, приближенные оптимальные поведения, которые дают доходы, немного (скажем, на один процент) отличающиеся от действительного максимума, могут оказаться столь же важными, как и точное решение. Они могут оказаться даже более важными, если нам нужны простые приближения в сложных ситуациях. Эти почти оптимальные поведения можно легко получить, потребовав, чтобы вычислительная машина удерживала в памяти не только максимальное значение и значение x_i , которое его дает, но также x_i , дающие значения в некоторой окрестности максимума. Это увеличивает требования к памяти и время вычислений, но не до такой степени, чтобы не использовать идею совсем.

16. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО СРАВНЕНИЮ С ПРЯМЫМ ПЕРЕБОРОМ

Поскольку первоначальная непрерывная вариационная задача была заменена дискретной, мы можем разыскивать максимальное значение с помощью простого перебора случаев. Особого изящества или привлекательности в таком подходе нет, но он может сослужить службу там, где более искусные методы не имеют успеха. Что касается ручных вычислений, условия времени и точности обычно исключают этот метод. Но раз есть цифровая вычислительная машина со своей удивительной скоростью счета, методы перебора оказываются в известной мере осуществимыми.

Возьмем некоторые простые процессы распределения и посмотрим, с чем было бы связано непосредственное освидетельствование всех возможностей. Для начала исследуем простую ситуацию, где каждая из x_i может принимать десять различных значений. Тогда процесс максимизации с N переменными приведет к 10^N различным множествам выборов.

Но в этом процессе общее число возможностей в действительности значительно меньше, так как выбор x_N немедленно ограничивает возможное изменение других x_i . Игнорируем временно этот пункт. Как мы увидим, это не изменит некоторые из наших основных заключений.

Для десятишагового процесса мы должны будем тогда обследовать 10^{10} случаев. Возможно, это кажется не таким уж большим числом, но несложный расчет дает некоторое

представление об его истинной величине. Если каждую миллисекунду обследовалось бы одно множество значений x_i , то всего потребовалось бы 10^7 секунд, что более $2 \cdot 10^3$ часов и, стало быть, есть величина порядка четырех месяцев *). Это непомерно большое количество времени, чтобы тратить его на численное решение какой-либо задачи, которая представляет действительность так же грубо, как принятая нами.

Предположим, что мы хотим рассмотреть несколько более сложную задачу, в которой имеется 20 различных процессов. Рассуждая по-прежнему нестрого, положим, что это влечет за собой 10^{20} различных возможностей. Так как последняя величина в 10^{10} раз больше 10^{10} , мы видим, что, как бы ни удавалось сокращать время процесса поиска, этот экспоненциальный рост числа возможностей с возрастанием размерности процесса сделает перебор случаев невозможным.

Кроме того, мы видим, почему можно так вольно обращаться с общим числом случаев. Если допускается 100 или 1000 выборов для каждой переменной, изменение в порядке величины числа возможностей для десятишагового процесса распределения посредством умножения на 10^{10} не влияет существенно на силу нашей аргументации.

Но довольно о наивных подходах к задачам оптимизации! Следует четко осознать, что процессы большого масштаба будут требовать как электронных, так и математических средств для своего исследования.

Почему же все-таки метод динамического программирования дает возможность легко и быстро решать задачи, намного более сложные, чем рассмотренная выше? Как подсказывают предыдущие рассуждения, объяснение этому нужно видеть в том, что применение метода функциональных уравнений эквивалентно использованию некоторого процесса поиска, который является гораздо более эффективным, чем примитивное обследование всех случаев.

Ключ доставляется принципом оптимальности. Согласно этому принципу, выбрав некоторое начальное x_N , мы затем отказываемся от обследования всех поведений, включающих этот частный выбор x_N , а рассматриваем только те поведения, которые оптимальны для $(N - 1)$ -шагового процесса

*) В оригинале здесь допущена ошибка, приводящая к оценке в 10 лет. (Прим. ред.)

с ресурсами $x \rightarrow x_N$. Этот магический способ позволяет сохранить аддитивность, а не мультипликативность числа операций. Время, требуемое для двадцатишагового процесса, теперь оказывается примерно вдвое больше времени, требуемого для десятишагового процесса.

17. КАКИЕ ТРУДНОСТИ МЫ ПРЕОДОЛЕЛИ?

В § 6 мы обсудили главные трудности на пути применения методов классического анализа к задачам максимизации. Остается теперь рассмотреть, до какой степени метод динамического программирования устраняет эти препятствия.

Во-первых, из простого индуктивного доказательства ясно, что метод всегда дает абсолютный, а не относительный максимум. Во-вторых, заметим, что дополнительные условия того типа, которые мы ввели, скорее упрощают задачу, нежели усложняют ее. Любое условие вида $a_i \leq x \leq b_i$, ограничивающее число возможностей на каждом шаге, упрощает процесс поиска и, следовательно, уменьшает вычислительные усилия. Другими словами, чем меньше поведений имеется на каждом шаге, тем быстрее вычисления.

Точно такие же доводы применимы к задачам максимизации по дискретным множествам. Чем меньше число допустимых выборов, тем проще вычисления. Простейшими задачами будут те задачи, где каждое x_i может принимать только немногие значения, скажем, 0 или 1.

Так как мы употребляем только табличные значения рассматриваемых функций, точная аналитическая структура последних не представляет для нас никакого интереса. Это означает, что наличие и свойства производных любого порядка не должны касаться нас вообще и линейность не должна быть нам помехой. Вместе с тем обратим внимание, что, когда обнаруживаются некоторые структурные особенности, как, например, выпуклость, вогнутость, монотонность и т. д., они могут быть весьма эффективно использованы для упрощения процесса поиска. Вопросы этого рода будут всесторонне обсуждены в последующих главах.

Наконец, мы подходим к вопросу об анализе чувствительности, поднятому в § 8. Двумя весьма важными параметрами в процессах распределения знакомого нам типа являются количество наличных ресурсов и число процессов, которые

мы можем привлекать. Наше решение, выражаемое при помощи двух функций $f_N(x)$ и $x_N(x)$, получается именно как функция этих основных параметров.

Вопросы, которые естественно возникают в ходе теоретической постановки и решения указанных задач распределения ресурсов, следующие:

- а) Как доход и поведение зависят от начальных условий?
- б) Каков результат изменения начального состояния при использовании некоторого оптимального поведения?
- с) Какова выгода от добавления еще одного способа или от продолжения процесса еще на один шаг?

Не имея достаточно прозрачного аналитического решения, довольно трудно извлечь из стандартной формулировки информацию этого типа.

Однако формулировка в терминах динамического программирования автоматически включает первоначальную задачу в семейство аналогичных задач, в которых основные параметры x и N принимают значения из некоторых множеств, и это позволяет нам ответить на поставленные фундаментальные вопросы. Например, в изучаемом процессе распределения решения находятся для способов, число которых изменяется от 1 до N , и для количеств ресурсов от 0 до x . Следовательно, после того как для N -шагового процесса было получено вычислительное решение, мы можем определить взаимодействие между параметром состояния x и числом шагов N для огромного ряда подзадач. Так как оптимальный доход дается, как функция основных параметров x и N , анализ чувствительности автоматически сопутствует решению.

Отсюда вытекает, что предложенный нами метод преодолевает все препятствия, о которых мы говорили. Ниже будет показано, почему наряду со всеми этими преимуществами мы тем не менее не имеем шаблонного решения для всех типов процессов распределения. Можно с уверенностью сказать, что все еще существует большая потребность в изобретательстве и что остается выполнить много интереснейших исследований, прежде чем можно будет достаточно эффективно рассмотреть значительное число важных процессов.

В этой главе мы намерены рассмотреть в деталях некоторые простые задачи с тем, чтобы впоследствии, когда мы перейдем к более трудным задачам, не возникало никаких вопросов, связанных с основными идеями.

18. БЛОК-СХЕМА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПЛАНА ДЛЯ ОБЩЕГО ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Обсуждая сведение задач от математической постановки к программе для вычислительной машины, что займет большую часть нашего последующего изложения, мы будем часто пользоваться блок-схемами. Они представляют собой диаграммы, разлагающие вычислительный процесс на его составные части и показывающие эти части достаточно подробно, чтобы их легко можно было программировать, даже не будучи хорошо знакомым с первоначальной математической задачей или методом. Следуя одной из этих схем, можно точно проследить, как задача может быть решена численно (рис. 9).

Так как настоящий пример является вводным, мы теперь дадим детальное объяснение различным этапам. Встречающиеся в дальнейшем блок-схемы будут иметь аналогичную структуру, и к ним не будет даваться дополнительных объяснений.

Этап 1. Основная программа будет применять рекуррентное соотношение (1.22), чтобы вычислить таблицу значений функции $f_k(x)$, используя $f_{k-1}(x)$. Для того чтобы включить сюда начальный шаг вычислений — уравнение (1.20), которое дает $f_1(x)$ в пределах общей процедуры, — мы определяем функцию $f_0(x)$, тождественно равную нулю. С помощью этого мы избегаем составления особой программы для определения $f_1(x)$. На практике запоминание нулей выполняется просто посредством установки всей памяти на нуль до введения перфокарт с исходными данными. Тогда область, обозначенная как $f_0(x)$, автоматически является нулем. Мы можем теперь заставить вычислительную машину определять $f_1(x)$, используя $f_0(x)$, тем же способом, как она определяет $f_k(x)$ на основе $f_{k-1}(x)$. Несмотря на то, что $f_1(x)$ может быть вычислена гораздо быстрее непосредственно из уравнения (1.20), экономия, получаемая вышеуказанным путем в объеме и времени программирования, вполне компенсирует наше рассмотрение. Интуитивное оправдание равенства нулю функции $f_0(x)$ состоит в том, что, каково бы ни было исходное количество ресурсов, не может быть никакого дохода при полном отсутствии способов производства. В некоторых других процессах нераспределенные ресурсы будут иметь некоторую стоимость, и эта стоимость будет взята равной $f_0(x)$.

Этап 2. Индекс k будет обозначать число способов, которые мы рассматриваем (ср. § 3). Вначале мы возьмём задачу, включающую только один способ. Далее индекс k будет возрастать по мере развертывания вычислений (см. этап 16).

Этап 3. Будем вычислять таблицу значений, представляющую функцию $f_1(x)$ в дискретных точках. Начальное значение аргумента x , для которого нужно вычислить $f_1(x)$, равно нулю. Вычислив и запомнив $f_1(0)$, мы вычисляем $f_1(\Delta)$, затем $f_1(2\Delta)$ и т. д. до тех пор, пока не заполним всю таблицу.

Этап 4. Внутренняя работа ячейки памяти β будет содержать «наилучший доход до сих пор», когда мы испытываем различные поведения, разыскивая максимизирующее. Записывая с самого начала в ячейку большое (по модулю) отрицательное число (обозначенное через $-\infty$, но, конечно, не являющееся действительной бесконечностью), мы обеспечиваем, что испытываемое первое решение о поведении будет принято как «наилучшее до сих пор». Как и на этапе 1, это — искусственный элемент, вводимый, чтобы избежать рассмотрения первого шага процесса в виде особого случая.

Этап 5. Мы применяем обозначение $x_k(x)$, чтобы указать, что наше решение о распределении дало количество начального ресурса x на шаге k . Так как сначала $k=1$ и

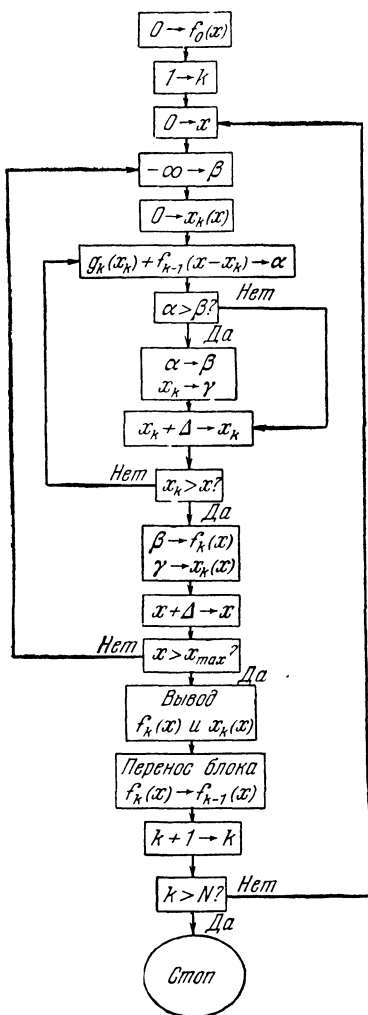


Рис. 9.

$x=0$, мы испытываем 0 в качестве начального значения для $x_1(0)$.

Этап 6. Этот этап составляет главную часть вычислений. Только что мы детализировали шаг k : ресурсы x и распределение $x_k(x)$. Используя функцию дохода $g_k(x_k)$ и оптимальный доход на $(k-1)$ -м шаге $f_{k-1}(x-x_k)$, мы вычисляем общий доход, связанный с данным решением на данном шаге, и запоминаем это число в ячейке α .

Этап 7. Сравним это число с числом в ячейке β , наилучшим доходом от всех ранее испытанных поведений для этого частного состояния и шага. Если текущее решение дает меньший доход, чем некоторое предыдущее решение, переходим к этапу 9. Если это — наилучшее решение о распределении среди испытанных до сих пор, выполняем этап 8.

Этап 8. Заменяем содержимое ячейки β большим доходом, который как раз и хранился в ячейке α . (Там, где смысл очевиден, мы не будем стараться проводить различие в обозначениях между наименованием ячейки и ее содержимым.) Ячейка γ должна содержать «наилучшее поведение до сих пор», следовательно, мы помещаем x_k в ячейку γ .

Этап 9. Исследовав эффект назначения количества x_k для k -го способа, мы теперь готовимся испытать большее назначение $x_k + \Delta$.

Этап 10. Является ли это назначение большим, чем наше начальное количество ресурсов x ? Если да, то это решение недопустимо и мы переходим к этапу 11. Если $x_k + \Delta$ — допустимое решение, мы возвращаемся к этапу 6, чтобы оценить это решение и сравнить его с предыдущими.

Этап 11. Мы только что сравнили все решения для определенного начального количества ресурсов x . Запомним максимальный достижимый доход $f_k(x)$ и решение, дающее этот доход $x_k(x)$.

Этап 12. Увеличим первоначальное количество ресурсов на Δ . Мы теперь имеем новую задачу, включающую то же самое число технологических процессов, но с несколько большим начальным количеством ресурсов.

Этап 13. Если новая задача включает количество ресурсов большее, чем то, с которого мы начали задачу с N процессами, мы, очевидно, не можем достигнуть задачи с k процессами и этим большим количеством ресурсов и нам не нужно вычислять этот результат. Таким образом, мы завер-

шили вычисление таблицы значений $f_k(x)$ и переходим к этапу 14. Если этот новый x допустим, мы начинаем весь процесс максимизации снова, возвращаясь к этапу 4.

Этап 14. «Вывод» результатов текущего этапа. Эти результаты, и в частности полигика в виде некоторой функции количества ресурсов, будут использованы позже, чтобы определить действительное оптимальное поведение, и поэтому должны быть записаны на ленте или отперфорированы на картах.

Этап 15. Программа относится к некоторым ячейкам памяти, в которых она отыскивает $f_{k-1}(x)$, и к другим ячейкам, где она запоминает новую таблицу $f_k(x)$. В этом месте в программе мы завершили применение старой таблицы для вычисления новой. С этого момента мы будем использовать новую таблицу $f_k(x)$ для вычисления $f_{k+1}(x)$. Так как $f_k(x)$ должна теперь играть роль «старой» таблицы, гораздо легче и более действительно заново внести ее в память, чем изменить адреса всех ссылок для нее в программе. Это новое размещение целого массива памяти называется «переносом блока» и выполняется в долю секунды.

Этап 16. Теперь мы переходим к следующему способу и готовимся решать семейство задач, включающих $k+1$ вместо k процессов.

Этап 17. Если мы вычислили именно $f_N(x)$, то $k=N$ и $k+1=N+1$ больше, чем N . Мы тогда останавливаемся и объявляем вычисления законченными. Если же k меньше или равно N , мы возвращаемся к этапу 3.

Это завершает наш анализ действительных операций, производимых вычислительной машиной.

На всем протяжении книги мы неоднократно будем ссылаться на статистику вычислений, основанную на нашем опыте работы с вычислительной машиной RAND-Джонниак. Описание машины дано в приложении V.

19. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В предшествующем разделе мы описали действительные этапы вычислительного решения общей задачи распределения ресурсов. В ходе решения мы получили ряд из N таблиц, каждая из которых доставляет общий доход и начальное поведение для фиксированного числа способов и некоторого интервала значений начальных ресурсов.

Использование этих таблиц для определения решения частной задачи (при данном числе способов и данном начальном состоянии) составляет вторую и отличную фазу вычислений.

Метод упомянут кратко в последней части § 14. Здесь мы хотим обсудить этот метод более подробно и попутно обеспечить логическую программу для вычислений.

Основное соображение заключается в том, что последняя таблица выдает оптимальное начальное распределение для

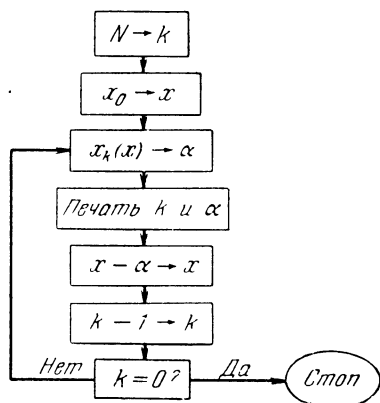


Рис. 10.

процесса, в котором участвует N способов; оно в свою очередь определяет начальное состояние для задач, включающих $N - 1$ способов. Соседняя таблица тогда определяет оптимальное второе решение. Аналогичным образом все выходные таблицы поведения обрабатываются в порядке, обратном тому, в котором они вычислялись. Единственная информация, используемая на этом пути, — множество таблиц поведения $\{x_k(x)\}$. Таблицы доходов $\{f_k(x)\}$ были суще-

ственны для образования последовательности результатов, но они не являются необходимыми в этой второй фазе вычислений.

Дадим подробное объяснение блок-схемы (рис. 10) для второй фазы решения задачи распределения.

Этап 1. Мы начинаем с рассмотрения задачи, включающей N способов производства и начальное количество ресурсов x_0 . Ячейка k содержит переменную, обозначающую число способов; x обозначает количество ресурсов.

Этап 2. Определим поведение, соответствующее вышеуказанной ситуации. Это повлечет за собой табличный просмотр, использующий таблицу $x_k(x)$, полученную в первой фазе. Последовательность $\{x_k(x)\}$ этих таблиц поведения, образованных в фазе 1, обычно запоминается на ленте или перфокартах и, следовательно, должна по мере надобности вводиться в оперативную память. Соответствующее поведение запоминается в ячейке α .

Этап 3. Номер рассматриваемого способа и поведение печатаются, образуя одну строку таблицы окончательных результатов.

Этап 4. Наличные ресурсы сокращаются на уже распределенное количество α , а число рассматриваемых способов уменьшается на единицу.

Этап 5. Если еще остается сколько-нибудь способов, мы возвращаемся к этапу 2. Это требует просмотра некоторой новой таблицы поведений, вложенной в память. Если никаких способов не остается, вычисления прекращаются.

На этом заканчивается исследование того, как получается решение для частных значений x и N в динамическом программировании.

20. ОДИН ПОЛЕЗНЫЙ ПРИЕМ

Заметим, что результаты фазы 1 обрабатываются в порядке обратном их получению. Если имеется запоминающее устройство на магнитной ленте, обработка легко осуществляется с помощью команд «считывания в обратном направлении».

Для машин с ограниченным вспомогательным запоминающим устройством результаты нужно последовательно перфорировать на картах. Здесь мы рекомендуем следующий прием, успешно применяемый на машине Джонниак.

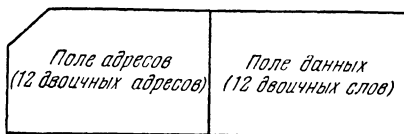


Рис. 11.

Выберем или изготовим карту такого формата, который дает возможность вставить ее в массив в перевернутом виде (т. е. вниз 12-й строкой, которая является первой на большинстве машин) без считывания данных с карты. Например, такая карта, часть стандартной системы ввода машины Джонниак, показана на рис. 11. Когда такая карта переворачивается (так что адрес остается еще в левой половине карты), то сначала читается верхняя строка, а не нижняя. Однако после считывания всех 12 строк те же самые данные записываются в те же ячейки, в которых они появились бы, если бы карта была вставлена обычным образом. Это позволяет нам поместить весь ввод этапа 1 на одну карту, начиная с последней

карты (т. е. лицом вниз), достигая при этом желаемой инверсии расположения для этапа 2.

Если требуется хранение карты, то каждой из N вводимых таблиц этапа 1 должна предшествовать карта переноса (порядок следования обратный), чтобы выделить признак конца таблицы на протяжении этапа 2 вычислений.

21. УСТОЙЧИВОСТЬ

Целый ряд очень интересных математических вопросов возникает в связи с использованным нами приближенным методом. Они не только представляют интерес для аналитика, но имеют также первостепенную важность для успешного применения наших численных методов. Все эти вопросы относятся к понятию устойчивости.

Мы брали уравнение и заменяли его родственным уравнением, в котором максимизация выполнялась по более узкой конечной области значений и рассматриваемые функции вычислялись только в конечном множестве точек. Так как обе эти операции, вообще говоря, вносят ошибки, немедленно возникает вопрос об их величине на каждом шаге, а также о росте этих ошибок при увеличении числа шагов.

Задачи этой общей природы были широко исследованы для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, но для функциональных уравнений динамического программирования было получено очень мало результатов. Мы кратко коснемся этой задачи в главе XII.

22. ПРОЦЕСС ЗАГРУЗКИ СУДНА

В качестве первой иллюстрации общих методов, описанных на предшествующих страницах, рассмотрим простой тип задач, которые часто возникают при загрузке судов и упаковке грузов.

Допустим, что необходимо загрузить корабль грузом, состоящим из отдельных предметов различных типов. Так как эти отдельные предметы имеют различные веса и стоимости, возникает задача о том, как загрузить судно ограниченной грузоподъемности грузом наибольшей ценности. С помощью простого видоизменения ситуаций читатель сможет представить себе много вопросов подобного рода.

23. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что мы имеем судно максимальной **грузо-**подъемности z , груз которого должен состоять из различных количеств предметов N различных типов. Пусть

$$\left. \begin{array}{l} v_i — \text{стоимость отдельного предмета } i\text{-го типа,} \\ w_i — \text{вес отдельного предмета } i\text{-го типа,} \\ x_i — \text{число отдельных предметов } i\text{-го типа,} \end{array} \right\} \quad (1.31)$$

взятых для погрузки.

Тогда задача определения груза наибольшей ценности **есть** задача максимизации линейной формы

$$L_N(x) = \sum_{i=1}^N x_i v_i \quad (1.32)$$

при **условиях**

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^N x_i w_i \leq z, \\ \text{(b)} \quad x_i = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (1.33)$$

Значения $\{v_i, w_i\}$, естественно, **берутся положительными**.

24. ОБСУЖДЕНИЕ

Если бы условие (1.33) сводилось просто к ограничению $x_i \geq 0$, задача была бы совсем несложной и ее решение можно было бы определить следующим образом. Рассмотрим отношение $\frac{v_i}{w_i}$, $i = 1, \dots, N$, и пусть a — индекс, для которого это отношение принимает максимальное значение. Затем выберем только предметы типа a ; при этом мы получим максимальную стоимость груза

$$v_N = \frac{z v_a}{w_a}. \quad (1.34)$$

Нетрудно показать, что при наличии условия (1.33), которое допускает только дискретное множество значений, предыдущее решение уже не всегда будет правильным. В настоящее время не существует точного решения для поставленной задачи, имеющего простую аналитическую форму.

Округление решения для задачи с непрерывным изменением переменных до ближайшего целого числа может привести к решению, далекому от оптимального. Рассмотрим, например, следующую задачу, включающую три различных типа предметов:

$$\begin{aligned}
 z &= 100 \text{ — максимальная грузоподъемность,} \\
 w_1 &= 49, & v_1 &= 20, \\
 w_2 &= 50, & v_2 &= 75, \\
 w_3 &= 51, & v_3 &= 102.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Если бы не условие целочисленности, мы погрузили бы $\frac{100}{51} \approx 1,96$ предметов типа 3 и имели бы стоимость $100 \cdot \frac{102}{51} = 200$. Так как это не разрешается, мы можем подвергнуться соблазну округлить 1,96 до 1 и взять один предмет типа 3, чтобы покрыть избыточный вес. Это поведение дает ценность 122. Однако настоящий оптимум легко определяется простым перебором; он равен 150 и достигается посредством погрузки двух единиц типа 2.

Ввиду такой скрытой природы точного аналитического решения представляет интерес указать простой алгоритм, основанный на предыдущем рассмотрении общих процессов распределения, который быстро дает решение.

25. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для $x \geq 0$ и $N = 1, 2, \dots$ определим функцию

$$f_N(z) = \max_{\{x_i\}} L_N(x), \tag{1.36}$$

где максимизация совершается по множеству значений x_i , определяемому (1.33).

Тогда

$$f_1(z) = \left\lfloor \frac{z}{w_1} \right\rfloor \cdot v_1, \tag{1.37}$$

причем $\lfloor w \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное w .

Поступая как в § 10, где можно найти общее рекуррентное соотношение, мы получаем простую формулу

$$f_N(z) = \max_{x_N} \{x_N v_N + f_{N-1}(z - x_N w_N)\};$$

здесь x_N пробегает значения из множества

$$0, 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{z}{w_N} \right\rceil. \quad (1.38)$$

В следующем параграфе мы опишем программу, употребляемую для вычисления как последовательности $\{f_N(z)\}$, так и оптимального выбора x_i .

26. ОБСУЖДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Основные вычисления могут быть выражены в 25 командах. Поскольку выполнение этого небольшого числа команд повторяется тысячи раз, можно с уверенностью сказать, что из миллисекунд складываются секунды. Фактически, с точностью до времени ввода и вывода, все время вычислений, по существу, определяется этими 25 командами. Они выполняют:

(а) оценку $v_i x_i$ для выбора груза в x_i предметов i -го типа;

(б) просмотр таблицы для оптимального дохода $f_{i-1}(z - w_i x_i)$, получаемого от $i - 1$ предметов предшествующего типа при оставшейся емкости $(z - w_i x_i)$;

(с) максимизацию (а) + (б) по всем неотрицательным целым x , не превосходящим наибольшего целого числа, содержащегося в z/w_i .

Вычислительное время зависит от распределения весов w_i . Однако можно указать следующую полезную оценку.

Если N — число типов предметов, z — максимальный допустимый вес грузов, \bar{w} — среднее из w_i , 0,005 — время, затрачиваемое на вычисление $x_i v_i + f_{i-1}(z - x_i w_i)$ при данных значениях x_i , v_i , w_i , z и f_{i-1} , то вычислительное время = $0,005 \left(\frac{z}{2\bar{w}} \right) zN$ секунд.

Время ввода и вывода является функцией количества требуемой информации. Печатание занимает около одной минуты на предмет; перфорация требует такого же количества времени. Однако необходимо печатать лишь окончательное оптимальное поведение, а отперфорированные данные можно записывать на барабан, тратя на это ничтожное время.

Блок-схема вычислительной программы приведена на рис. 12.

Таблица 1.2 содержит численные данные для небольшой задачи, включающей 8 типов предметов и судно грузоподъемностью 100 единиц. Таблица 1.3 дает оптимальное решение

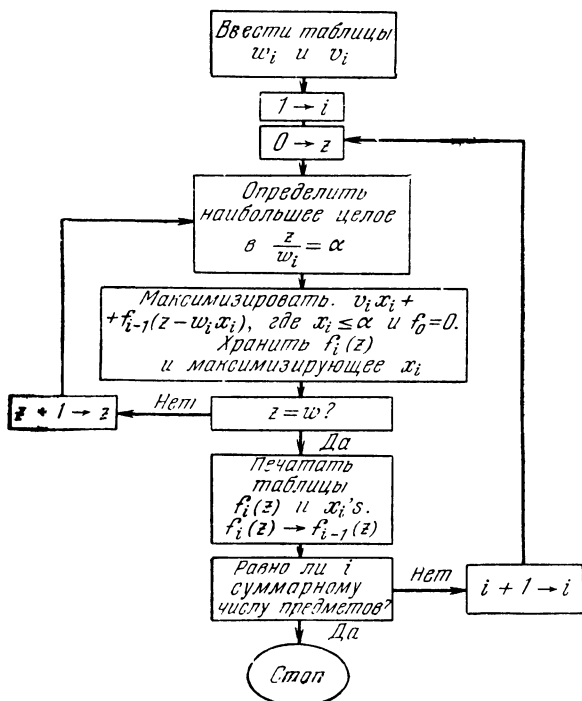


Рис. 12. Блок-схема программы для численного решения задачи о загрузке корабля.

для этой задачи. На рис. 13 мы видим, как оптимальный доход зависит от грузоподъемности. Здесь же показано, насколько неправильно может вести себя оптимальное поведение при переходе от одного значения грузоподъемности к другому. Это — результат ограничения целочисленными решениями.

Совершенствование вычислительных машин идет так быстро, что к тому моменту, когда эта книга выйдет из печати, указанные выше значения затрат времени на операции могут показаться несколько старомодными. Читатель, знакомый со

свойствами самых последних цифровых вычислительных машин, может легко внести необходимые изменения.

Т а б л и ц а 1.2

Номер типа	Вес	Значение груза	Номер типа	Вес	Значение груза
1	20	72	5	10	20
2	18	60	6	16	50
3	14	40	7	22	85
4	12	27	8	24	96

Т а б л и ц а 1.3

z	$f(z)$	Число погруженных предметов i -го типа
100	384	$x_8 = 4$
95	373	$x_7 = 1$ $x_8 = 3$
91	351	$x_7 = 3$ $x_8 = 1$
89	340	$x_7 = 4$
87	328	$x_3 = 1$ $x_8 = 3$
85	317	$x_8 = 1$ $x_7 = 1$ $x_8 = 2$
83	308	$x_5 = 1$ $x_8 = 3$
81	297	$x_5 = 1$ $x_7 = 1$ $x_8 = 2$

27. НАДЕЖНОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СХЕМ

Обратимся теперь к рассмотрению задачи из совершенно другой области. Мы выбираем эту задачу, чтобы проиллюстрировать процесс распределения, в котором функция оценки не является аддитивной.

Одной из основных задач, возникающих при конструировании любого узла сложной аппаратуры, является задача надежности. Вопрос приобретает чрезвычайно серьезный характер в связи с производством таких устройств, как, например, цифровая вычислительная машина. Одно неверное срабатывание какой-либо из тысяч электронных ламп, одна ошибка в какой-либо из миллионов операций — и все вычисления идут насмарку.

Во многих случаях задачу можно поставить как задачу, включающую построение надежного устройства из менее надежных компонент. Стандартный путь решения опирается на

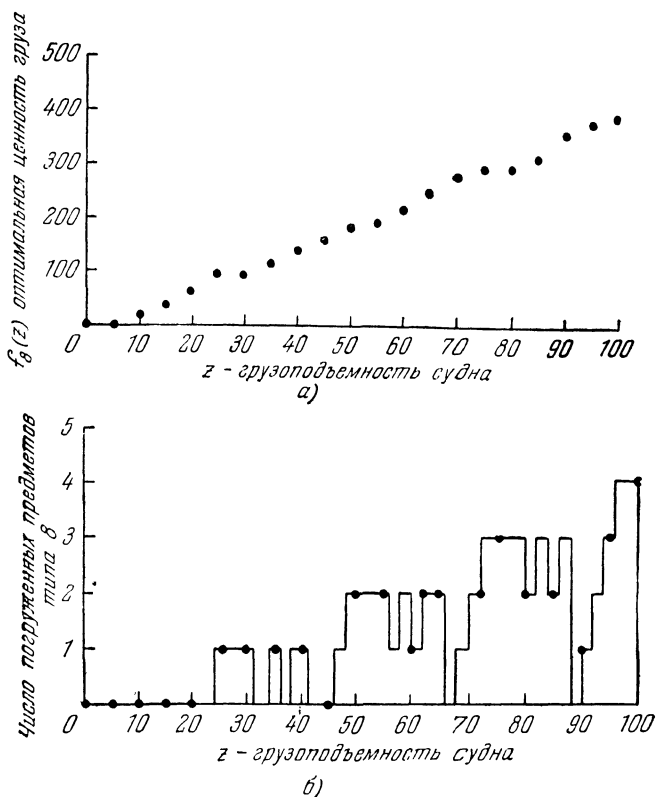


Рис. 13. Результаты численного решения для небольшой задачи о загрузке корабля, вмещающего восемь типов предметов с заданными весами и ценностями и судно грузоподъемностью в 100 единиц.

возможность дублирования компонент. Для некоторых типов простых схем получающаяся математическую задачу, как мы увидим, можно трактовать с помощью методов динамического программирования.

28. НАДЕЖНОСТЬ НА ОСНОВЕ ДУБЛИРОВАНИЯ КОМПОНЕНТ

Допустим, что устройство, которое мы хотим сконструировать, можно считать состоящим из некоторого числа последовательных ступеней (рис. 14). Надежность устройства будет определяться как вероятность его безотказной работы. Принимая во внимание последовательное расположение, эту полную вероятность можно взять равной произведению вероятностей безотказной работы отдельных ступеней. Если надежность слишком мала для эффективного использования, мы можем исправить положение, размещая в каждой ступени параллельно компоненты-дублиеры. В результате структурная схема устройства будет выглядеть так, как это показано на рис. 15.

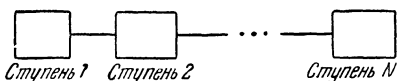


Рис. 14.

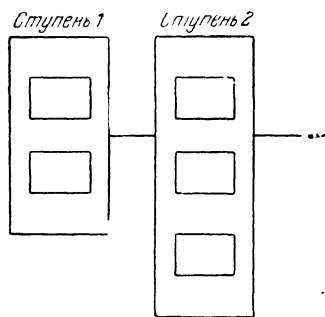


Рис. 15.

Мы предполагаем, что в каждой своей ступени устройство снабжено переключательными схемами, которые обладают свойством подключения новой компоненты в схему, когда старая компонента отказывает. Надежность какой-либо отдельной ступени будет теперь зависеть довольно сложным образом от числа параллельно действующих компонент и типа используемой переключательной схемы.

Практические ограничения по стоимости, весу, объему и, возможно, дополнительные ошибки, вносимые переключательными схемами, препятствуют использованию в каждой ступени сколь угодно большого числа компонент-дублеров и тем самым делают невозможной совершенно безотказную работу.

Задача, которую мы хотим здесь рассмотреть, заключается в определении наиболее эффективного решения, использующего идею дублирования, однако с ограничениями вышеуказанного типа.

Пока мы исследуем только простой частный случай. Более сложная модель будет рассмотрена в главе II в связи с двумерными процессами распределения.

29. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для $j = 1, \dots, N$ обозначим

$$\begin{aligned} 1 + m_j & \text{— число компонент-дублеров, используемых} \\ & \text{в } j\text{-й ступени, где } m_j = 0, 1, \dots; \\ \varphi_j(m_j) & \text{— вероятность безотказной работы } j\text{-й ступени,} \\ & \text{когда в ней используется } 1 + m_j \text{ компонент.} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Мы будем предполагать, что функции $\varphi_j(m_j)$ нам заданы; их конкретный вид нас интересовать не будет.

Надежность N -ступенчатого устройства тогда дается выражением

$$p_N = \prod_{j=1}^N \varphi_j(m_j). \quad (1.40)$$

Пусть

c_j — стоимость одной компоненты в j -й ступени.

Если не учитывать стоимость переключательных систем, то задача, которую мы хотим решить, есть задача максимизации p_N при условиях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{j=1}^N m_j c_j \leq c, \\ (b) \quad & m_j = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

При записи этих условий мы будем предполагать, что в каждой ступени должна быть обязательно использована по крайней мере одна компонента.

Обозначим через $f_N(c)$ значение p_N , определенное в (1.40), даваемое некоторым оптимальным поведением. Тогда для $N \geq 2$

$$f_N(c) = \max_{m_N} [\varphi_N(m_N) f_{N-1}(c - m_N c_N)], \quad (1.42)$$

где m_N удовлетворяет соотношениям

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & m_N = 0, 1, \dots, \\ (b) \quad & m_N c_N \leq C. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Для $N=1$ мы имеем

$$f_1(c) = \varphi \left(\left\lceil \frac{c}{m_1} \right\rceil \right). \quad (1.44)$$

В § 27 главы II будет приведено подробное обсуждение численного решения в случае, когда учитываются также и весовые ограничения.

30. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Если имеются две цифровые вычислительные машины или если доступна одна из более современных машин, допускающая параллельные операции, которые могут выполняться одновременно, предшествующие процедуры можно существенно улучшить. Допустим, что мы хотим максимизировать функцию

$$R_{2N} = g_1(x_1) + \dots + g_{2N}(x_{2N}) \quad (1.45)$$

в области

$$x_1 + \dots + x_N + x_{N+1} + \dots + x_{2N} = x, \quad (1.46)$$

где $x_i \geq 0$. Положим

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \dots + x_N &= y_1, \\ x_{N+1} + \dots + x_{2N} &= y_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

и

$$\left. \begin{aligned} f_N(y_1) &= \max_{x_1 + \dots + x_N = y_1} [g_1(x_1) + \dots + g_N(x_N)], \\ h_N(y_2) &= \max_{x_{N+1} + \dots + x_{2N} = y_2} [g_{N+1}(x_{N+1}) + \dots + \\ &\quad + g_{2N}(x_{2N})]. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Функции $f_N(y_1)$ и $h_N(y_2)$ могут быть вычислены рекурсивно посредством рассмотренного выше алгоритма. Как только это сделано, мы можем определить решение для первоначальной задачи, максимизируя $f_N(y_1) + h_N(y_2)$ в области значений $y_1 + y_2 = x$, $y_1, y_2 \geq 0$.

Главное заключается в том, что $f_N(y_1)$ и $h_N(y_2)$ можно вычислять одновременно. Этот процесс, конечно, можно продолжать далее в зависимости от имеющихся в распоряжении приспособлений параллельного действия, емкости памяти и т. д.

Если мы заранее знаем, что оптимальные выборы y_1 и y_2 лежат в окрестности $\frac{x}{2}$, мы можем почти вдвое сократить требования к памяти, а также полное необходимое вычислительное время. Это — очень важное замечание для нашей дальнейшей работы, когда проблема емкости памяти приобретает особую остроту.

Если все $g_i(x)$ одинаковы и требуется решение только частных задач, вычислительное время можно уменьшить весьма основательно. Так, чтобы вычислить $f_{1024}(x)$, мы будем писать:

$$\left. \begin{aligned} f_{1024}(x) &= \max_{0 \leq y \leq x} [f_{512}(y) + f_{512}(x-y)], \\ f_{512}(x) &= \max_{0 \leq y \leq x} [f_{256}(y) + f_{256}(x-y)] \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

и т. д. Функция f_{1024} может быть поэтому вычислена в 10 шагов.

31. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель этой главы состояла в том, чтобы ввести читателя в методологию динамического программирования, затрагивая как вычислительный, так и теоретический аспекты. Для того чтобы познакомить читателя с этапами, которые имеют место при численном решении задач оптимизации на основе метода функциональных уравнений, мы подробно рассмотрели две частные задачи — общую задачу распределения ресурсов и затем характерный процесс загрузки судна.

Вывод, который мы можем сделать из этого анализа, заключается в том, что задача определения максимума функции

$$R(x_1, \dots, x_N) = g_1(x_1) + \dots + g_N(x_N) \quad (1.50)$$

на множестве значений x_i , определенном соотношениями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{i=1}^N x_i = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & a_i \leq x_i \leq b_i, \\ (c) \quad & x_i = x_{i0}, \quad x_{i1}, \dots, \quad x_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

есть обычная задача, легко и красиво решаемая посредством алгоритма, доставляемого динамическим программированием.

Необходимое вычислительное время, по существу, прямо пропорционально N . Для большинства задач этого типа время для каждого шага будет порядка секунды.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Детальное изложение основ теории динамического программирования читатель может найти в книге:

R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957 [Русский перевод: Р. Беллман, *Динамическое программирование*, ИЛ, 1960].

Обсуждение связи применяемых здесь идей и классических идей итерации и непрерывных групп преобразований приведено в книге:

R. Bellman, *Adaptive Control Processes: A. Guided Tour*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961 [Русский перевод: Р. Беллман, *Процессы регулирования с адаптацией*, изд-во «Наука», 1964].

С экономическими исследованиями и работами в области исследования операций, лежащими в основе задач, рассматриваемых нами в первых трех главах, можно познакомиться по книгам:

K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, Stanford, California, 1958.

R. Dorfman, P. A. Samuelson and R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1958.

D. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960 [русский перевод: Д. Гейл, *Теория линейных экономических моделей*, ИЛ, 1963].

C. C. Holt, F. Modigliani, J. Muth, H. Simon, *Planning Production, Inventories and Work Force*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1960.

R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, John Wiley and Sons, New York, 1960. [Русский перевод: Р. Ховард, *Динамическое программирование и марковские процессы*, «Сов. радио», 1964.]

S. Karlin, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1959. [Русский перевод: С. Карлин, *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*, «Мир», 1964.]

A. Kaufman, *Méthodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle*, Dunod, Paris, 1959.

P. Rosenstiehl and A. Ghouila-Houri, *Les choix économiques, décisions séquentielles et simulation*, Dunod, Paris, 1960.

P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947.

§ 4. Некоторые дальнейшие трудности при построении моделей рассмотрены в работах:

R. Bellman, C. Clark, C. Craft, D. Malcolm and F. Ricciardi, On the construction of a multi-person, multi-stage business game, *Operations Research*, vol. 5, 1957, pp. 469—503.

R. Bellman and P. Brock, On the concepts of a problem and problem-solving, *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, 1960, pp. 119—134.

§ 10. Аналитический подход к этой задаче дан в приложении IV, где коротко изложены некоторые результаты Беллмана и Каруша. Там же дана ссылка на другую работу Каруша.

§ 14. Эта работа по численному решению функциональных уравнений, полученных из принципа оптимальности, была начата авторами в 1956 году и продолжена в ряде других работ (в основном неопубликованных). Несколько работ, на которые мы будем часто ссылаться, были опубликованы. Первой из них была статья:

R. Bellman and S. Dreyfus, On the computational solution of dynamic programming processes — I: on a tactical air warfare model of Mengel, *Operations Research*, vol. 6, 1958, pp. 65—78.

§ 27. Эти результаты изложены в статье:

R. Bellman and S. Dreyfus, Dynamic programming and the reliability of multicomponent devices, *Operations Research*, vol. 6, 1958, pp. 200—206.

Некоторые дальнейшие результаты, а также многочисленные ссылки даны в работах:

A. J. Mayne, Some reliability models of production lines with special reference to computer operation and scheduling, *Operations Research Quarterly*, vol. 11, 1960, pp. 16—30.

D. S. Stoller, *RAND Publications on Reliability*, The RAND Corporation, Research Memorandum RM-2613, 1960.

A. A. Mullin, The present theory of switching and some of its future trends, *Industrial Math. Jour.*, vol. 10, 1959—1960, pp. 24—44.

S. K. Stein, The mathematician as an explorer, *Scientific American*, May 1961, p. 148 ff.

Задачи, рассмотренные в §§ 22 и 27, можно трактовать как задачи целочисленного линейного и нелинейного программирования. Хотя Гомори и другими авторами было достигнуто некоторое продвижение в направлении решения этих задач с помощью симплекс-метода, многие из основных задач остались нерешенными. См. об этом

G. B. Dantzig, On the significance of solving linear programming problems with some integer variables, *Econometrica*, vol. 28, 1960, pp. 30—44.

В работе можно найти другие ссылки.

Некоторые другие применения методов динамического программирования, представляющие интерес, можно найти в работах:

W. A. Hall and N. Buras, The dynamic programming approach to water resources development, Jour. Geophysical Research, vol. 66, 1961, pp. 517—520.

J. de Guenin, Optimum distribution of effort: an extension of the Koopman basic theory, Operations Research, vol. 9, 1961, pp. 1—7.

На страницах журналов

Management Science, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Operations Research Quarterly, Journal of the Operations Research Society of America и Revue Française de Recherche Opérationnelle,

так же как и других журналов, издаваемых обществами по исследованию операций других стран, можно найти большое количество публикаций о других приложениях динамического программирования.

Интересное сообщение о решении задач распределения, где используются довольно тонкие математические средства, дано в работе:

I. E. Dubins and E. H. Spanier, How to cut a cake fairly, Amer. Math. Monthly, vol. 68, 1961, pp. 1—17.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Современное состояние теории линейного, целочисленного и выпуклого программирования детально освещено в книге

G. B. Dantzig, Linear programming and extensions, Princeton Univ. Press, 1963. (Готовится русский перевод.)

ГЛАВА II

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе мы нашли оптимальные политики для некоторых процессов распределения, когда в наличии имелся лишь один тип ресурсов и на его использование было наложено только одно ограничение. В этой главе мы хотим рассмотреть ряд более сложных задач, возникающих из более реалистических описаний экономических процессов.

Как мы увидим, основной формальный аппарат динамического программирования переносится на эти случаи без изменения. Тем не менее, на пути стандартного решения, полученного в главе I, возникают значительные трудности. Чтобы преодолеть эти трудности частично или полностью, мы применим ряд мощных и тонких математических приемов.

Наиболее мощный из них — метод лагранжевых множителей. Хотя обычно считают, что множители тесно связаны с классическим анализом, мы покажем, что это не единственная возможность их применения. Синтез метода функциональных уравнений динамического программирования и метода множителей Лагранжа позволяет разложить сложный процесс на более простые части. Это разложение делает разрешимыми весьма общие классы задач оптимизации.

Мы используем также различные формы метода последовательных приближений. Одно из ценных качеств теории динамического программирования заключается в том, что метод последовательных приближений можно применять как непосредственно к получающимся функциональным уравнениям, так и для определения оптимальных политик. Послед-

ний прием носит название «приближения в пространстве политик». Он всегда дает если не монотонную сходимость, то по крайней мере монотонную аппроксимацию. Классическим применением метода последовательных приближений является его приложение к функциональным уравнениям. Оно совсем не обязательно приводит к монотонной сходимости.

Как и в главе I, мы приведем большое количество численных результатов. Основная часть результатов этой главы базируется на экспериментах, и поэтому бессмысленно считать их окончательными или оптимальными. Как читатель убедится сам, существуют возможности для важных исследований в этих областях, равно как и необходимость в них.

2. ПРОЦЕСС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ ТИПОВ РЕСУРСОВ

Прямым обобщением простого процесса распределения, рассмотренного в § 2 главы I, является процесс разделения двух различных типов ресурсов на части, предназначенные для использования в ряде независимых технологических процессов.

Пусть два типа ресурсов имеются соответственно в количествах x и y , а x_i и y_i — количества этих ресурсов, выделенные для i -го процесса. Как и раньше, предположим, что задана функция полезности

$$g_i(x_i, y_i) \text{ — доход от } i\text{-го процесса, если на него отпущено } x_i \text{ ресурсов 1-го типа и } y_i \text{ — 2-го типа.} \quad (2.1)$$

Стоящая перед нами математическая задача выбора наиболее эффективного использования ресурсов сводится к максимизации функции $2N$ переменных

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N) = \sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i) \quad (2.2)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{i=1}^N x_i = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^N y_i = y, \quad y_i \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Мы назовем ситуацию, когда в наличии имеются два различных вида ресурсов, двумерным процессом распределения (независимо от величины N). Как будет показано, численное решение этой задачи основывается на вычислении последовательностей функций двух переменных.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Идя по тому же пути, что и в первой главе, введем последовательность функций $\{f_N(x, y)\}$:

$$f_N(x, y) = \max_{\{x, y\}} R_N(x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_N), \quad (2.4)$$

где максимум берется по области значений x_i, y_i , определяемой условиями (2.3). Здесь N принимает значения $1, 2, \dots$; x и y — любые неотрицательные числа.

Для $N=1$ имеем равенство

$$f_1(x, y) = g_1(x, y), \quad (2.5)$$

а для $N \geq 2$ — рекуррентное соотношение

$$f_N(x, y) = \max_{0 \leq x_N \leq x} \max_{0 \leq y_N \leq y} [g_N(x_N, y_N) + f_{N-1}(x - x_N, y - y_N)], \quad (2.6)$$

которое является прямым следствием принципа оптимальности. Прежде чем исследовать вычислительную осуществимость этого алгоритма, обсудим другие задачи, которые приводят к функциям двух переменных.

4. ПРОЦЕСС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ДВУМЯ ТИПАМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Во многих случаях мы встречаемся с задачей распределения одного типа ресурсов при двух видах ограничений. В задаче о загрузке судна это, например, ограничения, налагаемые на вес и объем. Такой тип задач можно рассматривать как частный случай предыдущей задачи, в которой x_i и y_i связаны соотношением $y_i = h_i(x_i)$.

Аналитическая задача в этом случае состоит в нахождении максимума функции

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (2.7)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_i \geq 0, \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^N a_i(x_i) \leq x, \\ (c) \quad & \sum_{i=1}^N b_i(x_i) \leq y. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Предположив, что $a_i(x_i)$ и $b_i(x_i)$ — монотонно возрастающие функции x_i , стремящиеся к ∞ , когда $x_i \rightarrow \infty$, мы могли бы при желании сделать замену переменных, переводящую $a_i(x_i)$ в x_i при условии, что x_i изменяется непрерывно. Если же x_i принимает дискретное множество значений, например 0, 1, 2, ..., такая замена переменных невозможна.

Заметим, что ограничения (2.3), выраженные равенствами, мы заменили неравенствами. До тех пор, пока речь идет и о процессе и о численном решении, это несущественное изменение позволяет избежать рассмотрения некоторых математических тонкостей.

5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Следуя подходу, намеченному в § 3, положим:

$$f_N(x, y) = \max_{\{x\}} [g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N)], \quad (2.9)$$

где максимум берется по всем тем x_i , которые удовлетворяют условиям (2.8, a, b, c). Имеем равенство

$$f_1(x, y) = \max_{\substack{a_1(x_1) \leq x \\ b_1(x_1) \leq y}} g_1(x_1) \quad (2.10)$$

и общее рекуррентное соотношение вида

$$f_N(x, y) = \max_{\substack{a_N(x_N) \leq x \\ b_N(x_N) \leq y}} [g_N(x_N) + \\ + f_{N-1}(x - a_N(x_N), y - b_N(x_N))]. \quad (2.11)$$

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Рекуррентные соотношения, которые мы получили в предыдущих параграфах, можно использовать для нахождения численного решения способом, почти аналогичным описанному в главе I. Хотя *качественно* метод абсолютно не будет отличаться от развитого выше, мы сталкиваемся с существенными *количественными* изменениями, когда мы исследуем вычислительный процесс с точки зрения требований к памяти, т. е. с точки зрения хранения данных и времени вычислений. Эта теория являет собой прекрасный пример того классического правила, что большая количественная разница может породить значительное качественное отличие. При вычислениях, приведенных в главе I, мы требовали хранения значений функции одной переменной, $f_N(x)$ в точках сетки $\{k\Delta\}$. Построим в том же духе приближение для (2.11). Чтобы определить функцию $f_N(x, y)$, например, в области $0 \leq x \leq M$, $0 \leq y \leq M$, договоримся, как и раньше, вычислять ее значения только в узлах сетки, скажем, при $x = k\Delta$ и $y = l\Delta$, $k, l = 0, 1, \dots, M$.

Заметим, что, тогда как раньше для задания $f_{N-1}(x)$ нам нужно было хранить $M+1$ значений, теперь для запоминания информации о функции $f_{N-1}(x, y)$ нам необходимо хранить уже $(M+1)^2$ значений. Если $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ — наша основная область, а для x и y выбран шаг в 0,01, то это означает, что вместо 10^2 точек нам понадобится уже 10^4 точек. В действительности увеличение будет по крайней мере в три раза больше, так как одновременно с хранением значений $f_{N-1}(x, y)$ мы должны вычислять новую функцию $f_N(x, y)$ и политику $x_N = x_N(x, y)$.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Из сказанного выше ясно, что по мере увеличения числа типов ресурсов и числа ограничений увеличивается количество независимых переменных функции дохода. Возможность непосредственного табулирования этих функций многих переменных сильно ограничена из-за огромного увеличения требований к памяти, которые не могут быть удовлетворены современными машинами, а в некоторых случаях даже машинами ближайшего будущего.

Прежде чем перейти к описанию различных путей использования математической изобретательности для разрешения дилеммы размерности в специально выбранных случаях, изложим типичное применение описанного выше метода.

Задача, которую мы рассматриваем ниже, иллюстрирует также способ математического рассмотрения процессов, включающих случайные эффекты.

8. ЗАДАЧА О ЗАПАСНЫХ ЧАСТЯХ

Допустим, что мы собираемся отправить транспортный самолет на отдаленную базу с грузом запасных частей для самолетов. Пусть имеется N типов запасных частей и с каждым из них связан определенный убыток, который терпит база, если частей этого типа не окажется в нужный момент на складе. Предположим далее, что спрос на каждый тип запасных частей описывается известным распределением Пуассона. Какое количество запасных частей каждого типа следует погрузить на самолет, чтобы минимизировать убытки базы, обусловленные нехваткой запчастей, при заданных ограничениях на вес W и объем S груза?

Это — типичная задача, встречающаяся при изучении процессов замены оборудования и управления запасами.

9. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Заметим, что мы впервые столкнулись с задачей с элементами случайности. Как мы увидим, в случаях минимизации некоторого среднего убытка постановка задачи в терминах динамического программирования, а также ее численное решение идут по тому же пути, что и раньше.

Одно из больших преимуществ методов динамического программирования состоит в том, что к детерминированным и стохастическим процессам можно применять один и тот же подход.

10. ПОДХОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть w_i обозначает вес детали i -го типа, s_i — ее объем, λ_i — среднее в распределении Пуассона, описывающем спрос на этот вид запасных частей, и c_i — убытки вследствие

неудовлетворения спроса на одну деталь i -го типа. Наконец, предположим, что нам желательно определить такую комплектность, при которой минимизируются ожидаемые убытки при определенных ограничениях на вес и объем.

Если x_i — количество деталей i -го типа, которое берется на борт, и $P(z)$ — вероятность потребности в z деталях, то ожидаемый от неудовлетворения спроса убыток будет равен

$$c_i \sum_{z=x_i+1}^{\infty} (z - x_i) P(z). \quad (2.12)$$

Эта формула имеет место независимо от вида распределения спроса. Мы проведем расчет для распределения Пуассона, так как этот тип распределения часто является превосходным приближением для наблюдаемых распределений. Кроме того, параметр λ этого распределения может быть оценен довольно легко.

Если $P(z, \lambda_i)$ — распределение Пуассона для i -го типа деталей, то математическое ожидание суммарного убытка равно

$$E_N = \sum_{i=1}^N c_i \left[\sum_{z=x_i+1}^{\infty} (z - x_i) P(z, \lambda_i) \right]. \quad (2.13)$$

Математическая задача состоит в минимизации E_N по всем x_i , удовлетворяющим трем условиям:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_i = 0, 1, 2, \dots, \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^N x_i w_i \leq w, \\ (c) \quad & \sum_{i=1}^N x_i s_i \leq s. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Определим теперь $f_k(w', s')$ как убыток, связанный с оптимальным выбором деталей первых k типов; грузоподъемность самолета ограничена величиной w' , а объем — величиной s' ; w' и s' могут меняться соответственно в интервалах $0 \leq w' \leq w$ и $0 \leq s' \leq s$.

Основное рекуррентное соотношение тогда примет вид

$$f_k(w', s') = \min_{x_k} \left[c_k \sum_{z=x_k+1}^{\infty} (z - x_k) P(z, \lambda_k) + \right. \\ \left. + f_{k-1}(w' - x_k w_k, s' - x_k s_k) \right], \quad (2.15)$$

где x_k изменяется в области

$$0 \leq x_k \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{w'}{w_k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{s'}{s_k} \right\rfloor \right\}. \quad (2.16)$$

Как и раньше, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x .

В следующем параграфе мы разберем решение уравнения (2.15) при ограничениях (2.14).

11. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Поскольку учитывается каждый тип деталей, начальный шаг состоит в вычислении ожидаемого убытка от включения в комплект 0, 1, 2, ... деталей этого типа. Таблица ожидаемых убытков определяется допущением о том, что распределение является пуассоновским, и знанием средней величины спроса и убытков от отсутствия одной детали. При рассмотрении разных политик определяют, обращаясь к таблице, непосредственный убыток от каждого выбора. Этот убыток прибавляется к ожидаемому убытку, связанному с оставшимися типами деталей, для того чтобы найти суммарный убыток от применения данной политики. Затем на этой основе выбирается минимизирующая политика.

Были запрограммированы как одномерный, так и двумерный случаи. В первом случае рассматривалось только ограничение на вес. На расчет для одной детали расходовалось около одной минуты, когда полная весовая нагрузка составляла 1000 фунтов, а в качестве весов деталей брались небольшие целые числа. В двумерной формулировке налагались как весовые, так и объемные ограничения. Верхняя граница, равная 30 как для веса, так и для объема, дала в результате сетку в 900 точек, и снова вычисление для одной детали потребовало около одной минуты. Ограничение в 30 значений для каждого измерения означает, что малые детали следует укрупнять в большие группы (как это обычно

и делается на практике), для того чтобы сделать осмысленным расчет. Граница в 30 могла бы быть увеличена до 100 при имеющемся объеме памяти; вычисления потребовали бы тогда примерно в десять раз больше времени. Число «десять» получается из отношения $100^2/30^2$.

12. ПРИМЕР

В этом параграфе приводятся некоторые типичные результаты. Они касаются оптимальной загрузки деталями

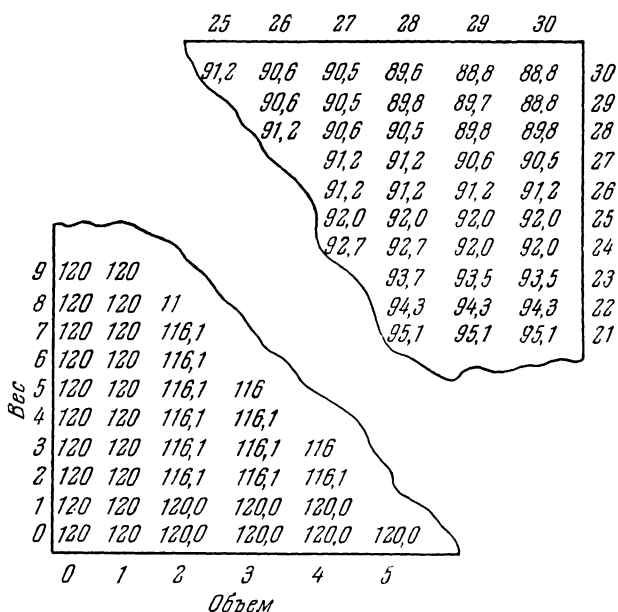


Рис. 16. Части таблицы значений функции $f_{10}(w, s)$, дающей минимальные издержки, связанные с комплектом веса w и объема s , когда учтены все 10 типов деталей.

десяти типов. Ожидаемый спрос на каждый тип равен четырём деталям, а величина штрафа за нехватку детали любого типа равна трем. Значения весов и объемов показаны в таблице 2.1.

На рис. 16 дана часть таблицы функции $f_{10}(w, s)$ двух переменных, представляющей собой минимальный убыток,

Таблица 2.1

Объем и вес предметов разного типа

Тип предмета	Вес	Объем	Тип предмета	Вес	Объем
1	3	5	6	2	2
2	5	4	7	4	5
3	2	7	8	7	7
4	5	4	9	5	3
5	6	6	10	3	4

связанный с комплектом весом w и объемом s , когда учтены все 10 типов деталей.

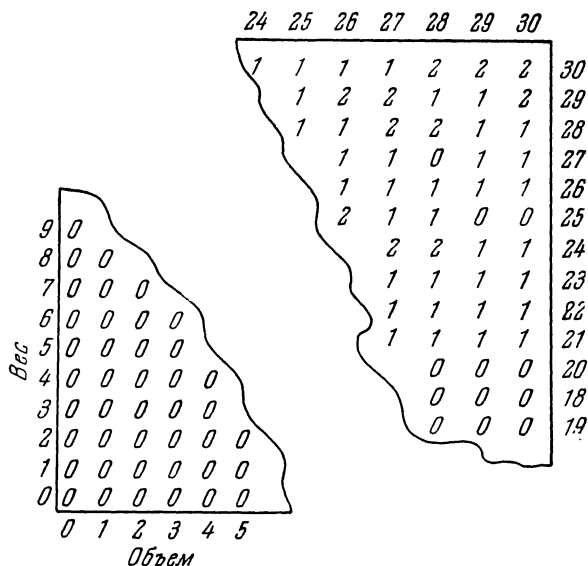


Рис. 17. Части таблицы значений функции $x_{10}(w, s)$, дающей оптимальное число включаемых в комплект деталей типа 10 при весовом и объемном ограничениях (w, s).

На рис. 17 приведена политика, связанная с данными рис. 16. Каждое из чисел в кусках таблицы на рис. 17

означает оптимальное число включаемых в комплект деталей типа 10 при весовом и объемном ограничениях (w, s).

Т а б л и ц а 2.2

Решение задачи

Тип пред-метов	Вес	Объем	Число включае-мых в комп-лект деталей	Стоимость	Накоплен-ная стои-мость	Остаток веса	Остаток объема
10	3	4	2	5,0	5,0	24	22
9	5	3	1	8,1	13,1	19	19
8	7	7	0	12,0	25,1	19	19
7	4	5	0	12,0	37,1	19	19
6	2	2	3	2,6	39,7	13	13
5	6	6	0	12,0	51,7	13	13
4	5	4	1	18,1	59,8	8	8
3	2	7	0	12,0	71,8	8	9
2	5	4	1	8,1	79,9	3	5
1	3	5	1	8,1	88,0	0	0

Таблица 2.2 воспроизводит конечную печать результатов этапа 2 вычислений (см. § 19 главы I) и дает решение задачи.

13. МНОЖИТЕЛЬ ЛАГРАНЖА

Обсуждение вопроса о множителе Лагранжа мы начнем с описания того, как он появляется в задачах анализа, связанных с разысканием максимума функции нескольких переменных при наличии ограничений. Как мы увидим дальше, метод имеет простое геометрическое происхождение и является, таким образом, гораздо более общим.

Чтобы свести к минимуму математические детали, мы будем рассматривать задачу отыскания максимума функции двух переменных $F(x, y)$ по всем точкам (x, y) , лежащим на кривой $G(x, y) = 0$. Действуя формально, обозначим через (x_0, y_0) точку экстремума и положим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon s, \\ y &= y_0 + \varepsilon t, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где s и t — вещественные параметры, а ε — бесконечно малая. Тогда условие того, что точка (x_0, y_0) дает экстремум,

приводит, как обычно, к соотношению

$$s \frac{\partial F}{\partial x_0} + t \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0, \quad (2.18)$$

а условие того, что точка (x_0, y_0) лежит на кривой $G(x, y) = 0$, аналогично приводит к соотношению

$$s \frac{\partial G}{\partial x_0} + t \frac{\partial G}{\partial y_0} = 0. \quad (2.19)$$

Поскольку эти два уравнения должны выполняться для всех s и t , имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_0} & \frac{\partial F}{\partial y_0} \\ \frac{\partial G}{\partial x_0} & \frac{\partial G}{\partial y_0} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что существует такая величина λ , что имеют место два совместных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_0} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_0} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_0} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Но они в точности совпадают с вариационными уравнениями, которые мы получили бы, если бы разыскивали экстремальные точки новой функции

$$H(x, y) = F(x, y) + \lambda G(x, y), \quad (2.22)$$

не принимая во внимание ограничения $G(x, y) = 0$. Параметр λ называется *параметром Лагранжа*.

Чтобы определить параметр λ , мы поступаем следующим образом*). Из (2.21) находим значения x_0 и y_0 через λ , а затем используем соотношение $G(x, y) = 0$ для определения λ . В отдельных благоприятных случаях этот метод работает хорошо. Но в общем мы сталкиваемся здесь со многими трудностями.

Нетрудно видеть, что этот метод можно использовать при решении задачи отыскания максимума функции $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ при ограничениях $G_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

*) См. обсуждение конкретного примера в § 5 главы I.

14. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОИСХОЖДЕНИЕ

В предшествующем параграфе мы вкратце описали, каким образом появляется множитель Лагранжа при изучении методами анализа вариационных задач с непрерывно меняющимися независимыми переменными. Поскольку мы хотим рассматривать более общие вариационные задачи, важно дать более широкое толкование этого множителя.

Рассмотрим задачу определения максимума функции $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ по всем x_i , принадлежащим некоторому множеству S и удовлетворяющим соотношению вида $G(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq 1$. Будем вычислять значения величин

$$y_1 = F(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad y_2 = G(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (2.23)$$

когда x_i пробегают все множество S .

Это дает *отображение* подмножества N -мерного x_i -пространства на часть двумерного y_i -пространства. Область в

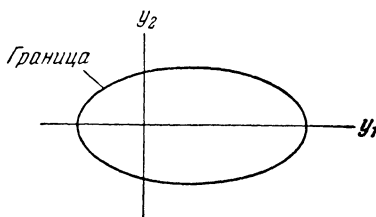


Рис. 18.

y_i -пространстве часто называется *пространством моментов* по причинам, которые завели бы нас в слишком далекие детали.

Чтобы объяснить простой геометрический метод, который мы будем применять, допустим, что множество точек (y_1, y_2) , которое получается, когда (x_1, x_2, \dots, x_N) пробегает S , образует выпуклое множество в y_i -плоскости. Мы можем мыслить это множество как внутренность овала вместе с его границей.

Чтобы решить исходную задачу, состоящую в отыскании экстремального значения y_1 при фиксированном (или ограниченном сверху или снизу) y_2 , мы должны определить точки границы овала (рис. 18). Следовательно, исходная задача

разыскания максимума эквивалентна задаче определения границы овала.

Эту границу можно найти геометрически следующим образом. Возьмем на плоскости (y_1, y_2) прямую, скажем

$$ay_1 + by_2 = k, \quad (2.24)$$

и будем сдвигать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет касательной к овалу. Эта геометрическая

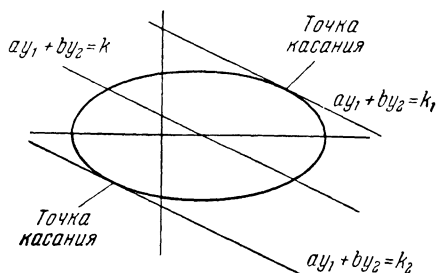


Рис. 19.

операция, очевидно, эквивалентна аналитической операции изменения k на некотором интервале.

Точки касания в точности совпадают с граничными точками овала, как показано на рис. 19.

Если эту операцию повторить при разных значениях a и b , которые соответствуют прямым всех направлений, мы охватываем всю границу. Заметим, что мы использовали фундаментальное понятие *двойственности* двумерных фигур: геометрическое место точек можно рассматривать как огибающую касательных.

Для того чтобы использовать эту идею конструктивно для получения конкретных аналитических результатов, мы заметим, что точки касательной определяются условием, что расстояние прямой $ay_1 + by_2 = k$ от начала имеет экстремальное значение (максимум или минимум). Для фиксированных a и b расстояние от начала пропорционально k . Таким образом, максимизация или минимизация величины k , определяемой равенством

$$ay_1 + by_2 = aF(x_1, x_2, \dots, x_N) + bG(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (2.25)$$

дает граничные точки.

Если a не равно 0, мы можем поделить на него и рассматривать эквивалентную задачу определения экстремальных значений выражения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) + \lambda G(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (2.26)$$

где $b/a = \lambda$. Теперь мы видим истинное происхождение множителя Лагранжа, а также то, каким образом обобщить эти идеи на случаи, когда имеется несколько ограничений.

Хотя эти идеи совсем просты, некоторые дедали строгого их осуществления опираются на весьма глубокое понятие, именно, на понятие *выпуклости*. Поэтому мы будем следовать формальному, интуитивному пути, а читателя, интересующегося доказательствами и обобщениями этих идей, будем отсылать к некоторым работам.

15. МНОЖИТЕЛЬ ЛАГРАНЖА В КАЧЕСТВЕ ЦЕНЫ

Если считать, что функция $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ характеризует наш «доход», обусловленный «распределением» (x_1, x_2, \dots, x_N) , а функция $G(x_1, x_2, \dots, x_N)$ характеризует «издержки», соответствующие этому распределению, то λ , или $-\lambda$, имеет смысл цены. Это интуитивное понятие можно сделать совершенно точным. Оно имеет важное значение в математической экономике вообще и в теории линейного программирования в частности.

В приложении II в конце книги эти идеи рассмотрены более детально.

16. ПРИМЕНЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА — I

Вернемся теперь к задаче максимизации, разобранный в § 2, и выясним, как ее можно было бы рассматривать с помощью множителя Лагранжа. Вместо задачи отыскания максимума функции

$$R(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) \quad (2.27)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} (a) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & y_1 + y_2 + \dots + y_N = y, \quad y_i \geq 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

мы рассмотрим задачу отыскания максимума видоизмененной функции

$$g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) - \lambda[y_1 + y_2 + \dots + y_N] \quad (2.29)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & y_i \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

где λ предполагается на время фиксированным параметром.

Максимизацию по y_i можно выполнить независимо от максимизации по x_i . Введем функцию

$$h_i(x_i, \lambda) = h_i(x_i) = \max_{y_i \geq 0} [g_i(x_i, y_i) - \lambda y_i]. \quad (2.31)$$

Для того чтобы это определение имело смысл, будем предполагать, что

$$\frac{g_i(x_i, y_i)}{y_i} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y_i \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

Если дело обстоит не так, то этот метод не годится. Поскольку в приложениях результат (2.32) является следствием «закона убывающих доходов», мы будем исходить из допущения, что он имеет место.

Задача сводится к задаче максимизации функции

$$h_1(x_1) + h_2(x_2) + \dots + h_N(x_N) \quad (2.33)$$

при ограничении (2.30,а). Эта задача легко решается методом функциональных уравнений, изложенным в главе I.

Решение $x_i(\lambda; x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, этой задачи оптимизации будет, естественно, зависеть от λ ; значения $y_i = y_i(\lambda)$, которые будут давать функцию $h_i(x_i)$, определяемую формулой (2.31), также зависят от λ . Будем далее менять λ до тех пор, пока не удовлетворим условию

$$\sum_{i=1}^N y_i(\lambda) = y. \quad (2.34)$$

Ниже, в § 19, мы исследуем законность и осуществимость этого подхода. А теперь продолжим наше рассмотрение формальной процедуры.

17. ПРИМЕНЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА — II

Таким же обычным путем мы рассматриваем задачу отыскания максимума функции

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (2.35)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N &\leq x, \\ (b) \quad b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_Nx_N &\leq y, \quad x_i \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Строим новую функцию

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) - \lambda [b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_Nx_N] \quad (2.37)$$

и рассматриваем задачу нахождения ее максимума в области, определяемой условием (2.36, а).

Соответствующее рекуррентное соотношение имеет вид

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x/a_N} [g_N(x_N) - \lambda b_N x_N + f_{N-1}(x - a_N x_N)]. \quad (2.38)$$

Решение $x_i = x_i(\lambda; x)$ зависит от λ так же, как и функции дохода $f_N(x)$.

Величина λ теперь меняется в пределах, допускаемых ограничением (2.36, б).

18. ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Прежде чем приступить к теоретическому обоснованию, а затем и к некоторым приложениям, остановимся на возможности понижения размерности, которую позволяет осуществить наш метод. Пусть рассматривается задача отыскания максимума функции

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (2.39)$$

по множеству значений x_i , удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.40)$$

и, возможно, другим условиям вида

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad x_i &= 0, 1, 2, \dots, \\ (b) \quad a_i &\leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Мы можем свести эту задачу к задаче определения последовательности функций $\{f_N(c_1, c_2, \dots, c_M)\}$ от M переменных c_1, c_2, \dots, c_M , к которой применим обычный алгоритм.

Вводя k множителей Лагранжа, можно сформулировать новую задачу максимизации функции

$$\sum_{j=1}^N g_j(x_j) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \right) \quad (2.42)$$

при $M - k$ ограничениях

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq c_i, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, M. \quad (2.43)$$

Таким образом, задача сводится к определению последовательности функций от $M - k$ переменных вместе с поиском по k -мерному пространству переменных λ_i . Ограничения на объем памяти вычислительных машин таковы, что легче иметь дело с большим числом одномерных задач, нежели с одной многомерной задачей, а потому указанная здесь процедура очень часто дает нам возможность рассматривать задачи, которые другими способами не удалось бы решить.

Кроме того, во многих случаях оказывается, что параметрическое представление решения через λ_i («цены») является столь же ценным, как и его представление в терминах ресурсов c_i .

Вопрос о выборе k зависит от конкретной задачи, от типа имеющейся вычислительной машины и от времени, выделенного на вычисления.

19. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Теперь мы хотим исследовать связь между вариационной задачей в ее первоначальном виде и задачей, возникающей при применении множителя Лагранжа. Чтобы выяснить характер результатов, которые здесь можно получать, достаточно рассмотреть частную задачу.

Рассмотрим задачу отыскания максимума функции

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_N) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) - \lambda(y_1 + y_2 + \dots + y_N) \quad (2.44)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & y_i \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Пусть $\bar{x}_i(\lambda)$, $\bar{y}_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, N$ — множество максимизирующих значений в предыдущей задаче. Мы хотим показать, что эти значения доставляют максимум функции

$$g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2) + \dots + g_N(x_N, y_N) \quad (2.46)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \\ (b) \quad & y_1 + y_2 + \dots + y_N = y, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

где $y = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i(\lambda)$.

Ценность этого результата состоит в том, что ни одно вычисление не пропадает даром. Каждый раз, когда задача (2.44) решается для конкретного значения λ , тем самым решается исходная вариационная задача для соответствующего значения y .

Доказательство ведется от противного. Предположим, что существует точка $\{x_i, y_i\}$, удовлетворяющая условиям (2.47), для которой

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i) > \sum_{i=1}^N g_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i). \quad (2.48)$$

Тогда, так как

$$\sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i = y, \quad (2.49)$$

мы получим:

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i) - \lambda \sum_{i=1}^N y_i > \sum_{i=1}^N g_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) - \lambda \sum_{i=1}^N \bar{y}_i. \quad (2.50)$$

Но это противоречит предположению о том, что

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N; \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N]$$

является максимизирующим множеством для функции (2.44) при условиях (2.45).

20. МОНОТОННОСТЬ ПО λ

Во всех приложениях следует ожидать, что, когда λ пробегает интервал $[0, \infty]$, y ведет себя подобным же образом. Однако строгое доказательство этого факта требует известных усилий и некоторых предположений относительно функций $g_i(x, y)$.

Покажем совсем просто, что при возрастании λ от 0 до ∞ сумма $\sum_{i=1}^N \bar{y}_i(\lambda)$ убывает монотонно. Этого следовало ожидать, исходя из того, что λ может рассматриваться как *цена*. Однако, поскольку мы наложили очень слабые ограничения на множество значений x_i и y_i , мы не можем ожидать *строгой* монотонности $\sum_{i=1}^N \bar{y}_i(\lambda)$ или непрерывности ее по λ .

Положим

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda &= \sum_{i=1}^N g_i(\bar{x}_i(\lambda), \bar{y}_i(\lambda)), \\ v_\lambda &= \sum_{i=1}^N \bar{y}_i(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Тогда, если $0 < \lambda < \mu$, то в силу свойств максимизации

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad u_\lambda - \lambda v_\lambda &\geq u_\mu - \lambda v_\mu, \\ (b) \quad u_\mu - \mu v_\mu &\geq u_\lambda - \mu v_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Следовательно, используя обе части неравенств (2.52,а) и (2.52,б), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda - \lambda v_\lambda &\geq u_\mu - \mu v_\mu + (\mu - \lambda) v_\mu, \\ &\geq u_\lambda - \mu v_\lambda + (\mu - \lambda) v_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Поэтому

$$(\mu - \lambda) v_\lambda \geq (\mu - \lambda) v_\mu. \quad (2.54)$$

Так как $\mu - \lambda > 0$, то мы получаем требуемый результат:

$$v_\lambda \geq v_\mu. \quad (2.55)$$

Комбинируя этот результат с (2.52,а), получим:

$$\left. \begin{aligned} u_\lambda - \lambda v_\lambda &\geq u_\mu - \lambda v_\mu, \\ \lambda v_\lambda &\geq \lambda v_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

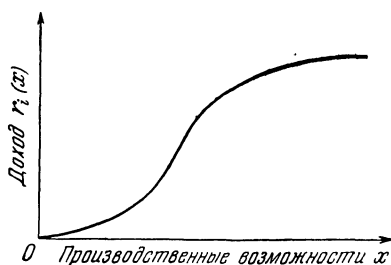
откуда

$$u_\lambda \geq u_\mu. \quad (2.57)$$

Эта монотонность значительно упрощает определение значения λ , соответствующего данному значению u . Для сокращения времени, требуемого для решения конкретной задачи, можно использовать методы поиска, которые будут рассмотрены в главе IV, или какие-либо более простые методы.

21. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА — РЕКЛАМНАЯ КАМПАНИЯ

Рассмотрим ситуацию, в которой средства предприятия делятся между различными производственными отделами. Каждый из этих отделов представляет свою оценку возможной прибыли в виде функции от производства своего индивидуального продукта. В



таких случаях можно встретиться с кривыми индивидуального дохода, имеющими типичную S-образную форму, приведенную на рис. 20.

Чтобы получить функцию полезности нужного вида, используем уравнение

$$r_i(x) = v_i [1 - (1 - e^{-a_i/x})^x]. \quad (2.58)$$

Рис. 20.

Здесь v_i — максимально возможный доход*), который может быть получен на рынке, а a_i — уровень рыночной конкуренции. Малые ассигнования дают небольшие шансы на

*) Имеется в виду доход при наличии неограниченно больших средств. (Прим. ред.)

успех, в то время как выделение большого количества производственных средств приводит рынок в состояние насыщения. Обсуждение связанных с решением такой задачи вычислительных вопросов и числовые результаты содержатся в § 23.

Мы видели, как задача максимизации, включающая один тип ресурсов и N технологических процессов, приводится к последовательности одномерных задач максимизации. Но представим себе, что надо распределить несколько типов ресурсов; это означает, что общие затраты являются функцией нескольких переменных. Тогда мы должны иметь дело с последовательностью функций нескольких переменных и встретиться со всеми вычислительными трудностями, которые естественно при этом возникают.

В качестве примера такого процесса рассмотрим следующую ситуацию. Пусть упомянутое выше предприятие наряду с ограниченным производственным оборудованием имеет также ограничение на расходы по рекламе. Доход от конкретного распределения ресурсов принимается равным

$$r_i(x, y) = v_i [1 - (1 - e^{-a_i/(x+y)})^x], \quad (2.59)$$

где x — расходы на производство и y — расходы по рекламе. Из свойств этого уравнения вытекает, что без производства не может быть получена никакая прибыль, каковы бы ни были расходы на рекламу; но в сочетании с производством, чем больше реклама, тем больше прибыль. Наша задача: выбрать x_i и y_i , $i = 1, 2, \dots, N$, так, чтобы максимизировать функцию

$$R_N = \sum_{i=1}^N r_i(x_i, y_i) \quad (2.60)$$

по всем x_i и y_i , удовлетворяющим условиям

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &\leq x, \\ \sum_{i=1}^N y_i &\leq y, \\ x_i, y_i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Полагая $f_N(x, y)$ равной максимуму R_N в этой области, обычным путем получим функциональное уравнение

$$f_N(x, y) = \max_{\substack{0 \leq x_N \leq x \\ 0 \leq y_N \leq y}} [r_N(x_N, y_N) + f_{N-1}(x - x_N, y - y_N)]. \quad (2.62)$$

22. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Как известно, задачи с большим числом измерений легко исчерпывают возможности памяти вычислительной машины и требуют чрезмерно большого времени. Хотя достоинством метода динамического программирования является существенное понижение размерности, мы видели, что трудности, сопутствующие функциям большого числа переменных, все же могут оказаться непреодолимыми. Использование множителей Лагранжа приводит во многих случаях эти задачи к доступному для расчетов виду.

Предположим, что мы имеем неограниченные возможности расходования средств на рекламу, что каждый доллар, затраченный на рекламу, имеет результатом λ долларов, вычитаемых из нашего общего дохода. Ясно, что, если λ равно нулю, мы будем рекламировать безудержно, в то время как если λ велико, мы вовсе откажемся от рекламы. Каждый выбор λ

дает некоторое значение $\sum_{i=1}^N \bar{y}_i$ между 0 и ∞ , где $\bar{y}_i = \bar{y}_i(\lambda)$

представляет собой максимизирующий выбор y_i . Если мы выберем λ так, чтобы $\sum \bar{y}_i = y$, то, как указывалось выше, мы решим тем самым исходную задачу с двумя условиями без явного рассмотрения второго условия. Функциональное уравнение, связанное с задачей максимизации функции

$\sum_{i=1}^N r_i(x_i, y_i) - \lambda \sum_{i=1}^N y_i$, имеет теперь вид

$$f_N(x) = \max_{\substack{0 \leq x_N \leq x \\ 0 \leq y_N < \infty}} [r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N + f_{N-1}(x - x_N)]. \quad (2.63)$$

Исходная задача решается по следующей схеме: фиксируем λ , решаем одномерную задачу, проверяем полученное значение $\sum \bar{y}_i$, подбираем λ так, чтобы сделать $\sum \bar{y}_i$ приблизи-

тельно равной y , решаем задачу для нового значения λ . Повторяем этот цикл, пока не найдем λ , для которого $\sum \bar{y}_i = y$. Обычно бывает достаточно трех или четырех итераций, в зависимости от усилий, затрачиваемых для определения λ на каждой итерации. Подробно этот итеративный процесс будет обсуждаться в следующем параграфе.

Один двумерный расчет даст доходы и оптимальные политики для всех комбинаций значений x и y , не превосходящих своих верхних границ. В процессе такого решения мы вычисляем значения функции двух переменных в некоторой области плоскости (x, y) . Используя метод множителей Лагранжа, мы находим пространственную кривую, которая дает доходы и политики в точках *кривой* на плоскости (x, y) для каждого конкретного λ . Несколько значений λ дают несколько таких кривых в пространстве. По этим кривым можно получить общий вид функции двух переменных. Этот метод будет проиллюстрирован в следующем параграфе.

23. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим сначала простейший тип процесса динамического программирования, обсуждавшегося в § 21, — процесс с одним видом ресурса. Программирование такой задачи для быстродействующей цифровой машины, такой как Джонниак или ИБМ-709, может быть с использованием языка Фортран выполнено за пару дней. Блок-схема программы для этой задачи показана на рис. 21. Оптимальное распределение 100 единиц ресурса по 20 процессам потребует около 10 минут машинного времени. Результаты распределения для случая, когда максимальные возможные доходы от каждого процесса v_i ($i = 1, 2, \dots, 20$) принимают значения 1, 2, ..., 20 (определяемые потенциальным рынком) и конкуренция пропорциональна объему рынка ($a_i = v_i = i$), приведены в таблице 2.3.

Т а б л и ц а 2.3

Процесс	от 1 до 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Распределение	0	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11

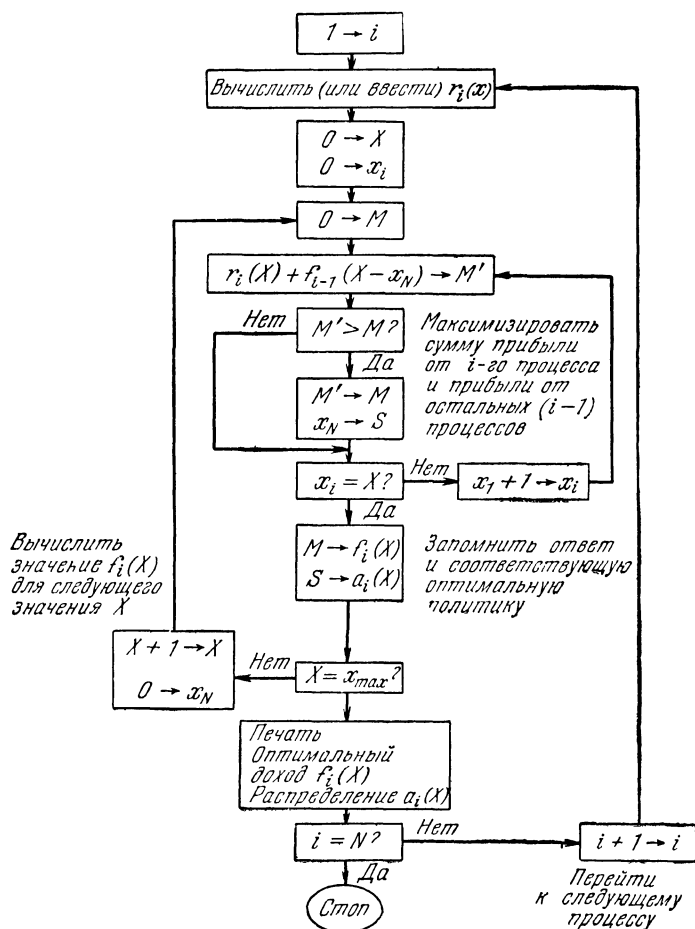


Рис. 21. Блок-схема программы для одномерной задачи распределения ресурсов.

Рис. 22 показывает, что хотя индивидуальные функции дохода в высшей степени нелинейны, оптимальная функция дохода для 20 процессов является почти линейной функцией от суммарного производства.

Рассмотрим теперь модель производства — рекламы §§ 21—22. Используя метод множителей Лагранжа, мы получим для каждого фиксированного λ одномерную задачу.

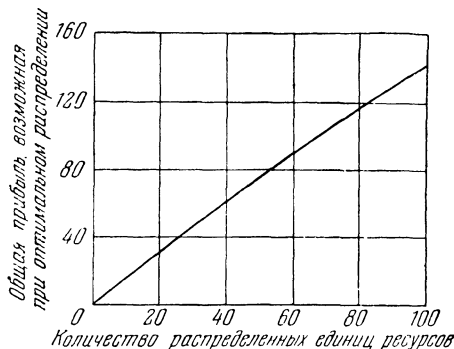


Рис. 22. Общая прибыль как функция количества ресурсов при использовании оптимальной политики.

При этом для $0 \leq x \leq 200$ вычисления занимают около двух минут на один процесс. Перепишывая уравнение (2.63) в виде

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} \left[\max_{0 \leq y_N < \infty} (r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N) + \right. \\ \left. + f_{N-1}(x - x_N) \right] = \max_{0 \leq x_N \leq x} [Q_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)], \quad (2.64)$$

мы видим, что можно сначала получить доход в виде функции от x_N , а затем максимизировать по x_N . В следующем параграфе мы разовьем эту идею в деталях. Время вычислений значительно сокращается за счет доказательства того, что если $\bar{y}_N > 0$ максимизирует $r_N - \lambda y_N$ для $x = \bar{x}_N$, то для $x > \bar{x}_N$ максимизирующее значение y_N будет меньше, чем \bar{y}_N .*).

*) Это — следствие знания структуры функции, входящей в (2.63). См. приложение I О. Гросса.

На рис. 23 изображена функция $r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N$ как функция y_N при двух фиксированных значениях $x_N, x_N^{(1)} > x_N^{(2)}$.

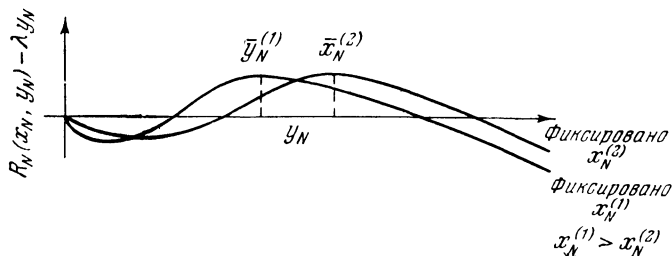


Рис. 23. Для фиксированного λ оптимальные ассигнования на рекламу \bar{y}_N убывают, когда ассигнования на производство x_N возрастают.

На рис. 24 мы видим, как с изменением x изменяется $\sum y_i$ для оптимально выбранных y_i при фиксированном λ . Разрывы происходят за счет того, что при малых x увеличение x

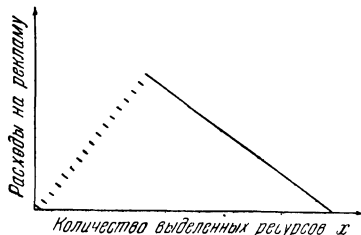


Рис. 24. Расходы на рекламу, если используется оптимальная политика, при фиксированном λ .

имеет результатом оптимальное распределение, включающее дополнительный процесс с ненулевой интенсивностью и скачок в ассигнованиях на рекламу.

Для каждой точки кривой в плоскости (x, y) , аналогичной приведенной на рис. 24, вычисления дают также доход, связанный с оптимальным распределением x единиц для целей производства и y единиц для целей рекламы. После того как

получено несколько кривых для различных λ , мы можем нарисовать двумерную функцию дохода (рис. 25).

Мы проанализировали двумерный процесс. Прямой анализ такого процесса методом двумерного динамического программирования потребовал бы таблиц функции из $200 \times 600 = 120\,000$ значений и, следовательно, сотен часов машинного времени. Применение метода множителей Лагранжа позволило нам получить эквивалентный результат приблизительно за три часа. При этом было использовано 1000 ячеек памяти.

24. ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

В случаях, когда множитель Лагранжа разумно интерпретировать как цену и когда целевая функция и управляемая переменная заданы в денежном выражении, приближенное значение безразмерного множителя часто можно найти с помощью методов анализа цены, не прибегая к быстродействующим машинам

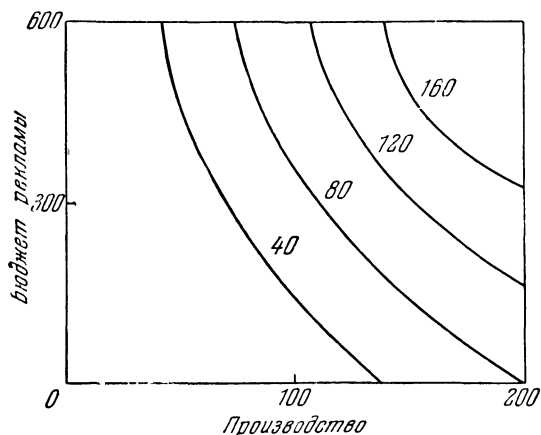


Рис. 25. Общая прибыль, получаемая при оптимальном распределении различных комбинаций начальных ресурсов.

Однако в большинстве случаев множитель, будучи все же «ценой», измеряет обмен на первый взгляд несоизмеримых количеств. Например, в задаче о запасных частях для самолета с ограничениями по объему и по весу груза исключение ограничений по объему с помощью множителя Лагранжа приводит к тому, что этот множитель приобретает невообразимую размерность «стоимость простоя/кубический фут». Чтобы определить априори числовое значение множителя, нам нужно было бы узнать, насколько дополнительная единица объема уменьшит ожидаемые издержки от нехватки при оптимальной политике. Очевидно, знание этого позволяло бы решить исходную задачу.

Мы разрешим эту дилемму итеративным способом. Будем последовательно угадывать значение множителя, пока не найдем правильного. Это истинное значение является ценой, приводящей к оптимальному решению, в точности удовлетворяющему ограничению задачи.

Рассмотрим процесс фактического угадывания множителя. Так как каждое угадывание означает полное решение задачи динамического программирования, то полезно затратить некоторые усилия на априорный анализ этой операции.

Чтобы сделать рассмотрение конкретным, предположим, что мы решаем задачу максимизации функции

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_i) \quad (2.65)$$

по всем x_i , удовлетворяющим условиям

$$\sum_{i=1}^N x_i = x, \quad (2.66)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i(x_i) = h. \quad (2.67)$$

Предположим далее, что очевидная двумерная постановка

$$f_N(x, h) = \max_{x_N} [g(x_N) + f_{N-1}(x - x_N, h - h(x_N))], \quad (2.68)$$

где $0 \leq x_N \leq x$ и $h_N(x_N) \leq h$, заменена одномерным вариантом:

$$f_N(x) = \max_{x_N} [g_N(x_N) - \lambda h_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)], \quad (2.69)$$

где λ — множитель Лагранжа, который надо определить так, чтобы для максимизирующих x_i выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^N h_i(x_i) = h. \quad (2.70)$$

Никаких определенных рецептов для первоначального выбора λ нет. Разумное угадывание должно быть основано

на специфике задачи. Однако во многих случаях существует эффективная схема для третьего и последующих приближений. Она основана на интерполяционной формуле. Если уже испробованы два значения λ , то можно вычислить два множества значений по таблице 2.4.

Т а б л и ц а 2.4

λ	$f_N(\lambda)$	Оптимальная политика $\{x_i\}$	$\sum h(x_i)$

Тогда, зная λ_0 , λ_1 и соответствующие значения $\sum h(x_i)$, можно попытаться использовать эти данные, чтобы вычислить λ_2 , для которого $\sum_i h_i(x_i)$ будет равна h . Если значения $\sum_i h_i(x_i)$ обозначены соответственно через h_0 и h_1 , то формула для расчета имеет вид

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{h_1 - h_0} (h - h_0) + \lambda_0. \quad (2.71)$$

Если вычислены более чем два значения λ , то можно использовать два последних из них или воспользоваться более точной интерполяционной формулой.

Обычно оказывается возможным априори определить результат выбора $\lambda = 0$. Эту информацию можно использовать, чтобы не тратить времени и сил на фактическое вычисление. Если такой возможности нет, может оказаться необходимым начать вычисление с двух произвольно выбранных значений.

После того как использовано линейное приближение для нахождения λ_2 , может оказаться удобным употребить все три результата для нахождения λ_3 с помощью кубического уравнения. Оправдано или нет дополнительное программирование, требуемое для этой весьма сложной интерполяции, — должно определяться объемом задачи.

Наконец, оказалось удобным не хранить информацию о политике, полученную при предварительных вычислениях, имеющих целью определить истинное значение множителя. После того, как истинный множитель найден, вычисление

повторяют, записывая на магнитной ленте или перфокарках таблицы оптимальных политик. Так как вывод результатов, даже на ленту, страшно замедляет работу вычислительной машины, необходимость повторения одного вычисления не превращает эту схему в неэффективную. Во время вычисления при фиксированном λ строится таблица оптимальных значений $\sum_{i=1}^k h_i(x_i) = H_k(x)$, так же как и обычная таблица $f_k(x)$.

Эта таблица «кумулятивная», она пополняется на каждом шаге с помощью формулы

$$H_k(x) = h_k(x_k) + H_{k-1}(x - x_k), \quad (2.72)$$

где x_k — как обычно, максимизирующая политика, связанная с рекуррентным соотношением

$$f_k(x) = \max_{x_k} [g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)]. \quad (2.73)$$

Важно отметить, что таблица функции $H_k(x)$ одна, непрерывно пополняемая аналогично таблице $f_k(x)$, а не множество таблиц, как таблицы политик. Поэтому ее всегда можно хранить в оперативной памяти. Число $H_N(x)$ есть значение $\sum_{i=1}^N h_i(x_i)$, используемое для определения следующего значения λ . Величина $f_N(x) + \lambda H_N(x)$ есть фактический доход при политике, оптимальной относительно множителя Лагранжа λ .

25. ЗАДАЧА С МНОГИМИ УРОВНЯМИ

Задача, которую мы только что рассматривали, иллюстрирует интересный аспект постановки задач динамического программирования. Благодаря существенной зависимости трудности решения от числа параметров состояния некоторые задачи, кажущиеся чрезвычайно трудными с обычной точки зрения, оказываются на самом деле простыми с точки зрения динамического программирования, и наоборот.

В приведенной выше задаче мы столкнулись с задачами выбора политик на двух уровнях. На первый взгляд, более простой задачей была задача оптимального (с точки зрения

извлечения прибыли) распределения фиксированных расходов на производство и расходов на рекламу. Более трудной могла показаться задача оптимального разделения наличного капитала между производством и рекламой таким образом, чтобы оптимальное же использование ассигнованных средств максимизировало прибыль. На самом деле это не так.

Первая формулировка приводит к двумерной задаче. Эта задача была решена сведением к последовательности одномерных задач с помощью множителя Лагранжа. Каждая такая одномерная задача была в действительности описанной выше задачей второго типа. Выбирая множитель $\lambda = 0$ и производя максимизацию по области

$$0 \leq x_N + y_N \leq x, \quad (2.74)$$

мы можем решить задачу распределения с двумя уровнями. Одномерная постановка задачи имела бы вид

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N + y_N \leq x} [r_N(x_N, y_N) + f_{N-1}(x - x_N - y_N)]. \quad (2.75)$$

Это замечание остается в силе для широкого класса задач со многими уровнями. Ниже в этой главе мы рассмотрим транспортные задачи, в которых требуется найти план оптимальной перевозки грузов из небольшого числа источников в большое число пунктов потребления. Соображения, которые мы использовали выше, показывают, что задача оптимальной перевозки из одного производящего центра в небольшое число складов и затем в пункты потребления не является существенно более трудной.

26. МНОГОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПОЛИТИК

В модели рекламы мы хотели максимизировать функцию по двум переменным. В § 23 мы упомянули, что уравнение

$$f_N(x) = \max_{\substack{0 \leq x_N \leq x \\ 0 \leq y_N < \infty}} [r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N + f_{N-1}(x - x_N)] \quad (2.76)$$

можно было бы заменить уравнением

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [Q_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)], \quad (2.77)$$

где

$$Q_N(x_N) = \max_{0 \leq y_N < \infty} (r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N). \quad (2.78)$$

Это замечание имеет не только попутный интерес. Если программировать уравнение (2.76) непосредственно, то для каждого значения x надо было бы вычислить все допустимые пары (x_N, y_N) и в результате величина $r_N(x_N, y_N) - \lambda y_N$ *вычислялась бы заново* для одних и тех же x_N и y_N много раз. Вычислив сначала функцию $Q_N(x_N)$, мы избежим ненужного повторения.

Это упрощение происходит за счет того, что переменная y_N фигурирует только в целевой функции и не входит в аргумент функции f_{N-1} .

Мы увидим, что этот способ будет использован многократно. Он имеет как аналитическое, так и вычислительное значение при решении задачи о хранении на складе (глава III).

27. ПРОБЛЕМА НАДЕЖНОСТИ

Рассмотрим теперь более детально проблему надежности, уже обсуждавшуюся в §§ 27—28 главы I. Предполагаем, что при использовании $1 + m_j$ компонент в j -й ступени вероятность успешного функционирования этой ступени задается известной функцией $\varphi_j(m_j)$.

Предположим далее, что имеются два типа ограничений, по *стоимости* и по *весу*. Пусть c_j — стоимость отдельной компоненты в j -й ступени и w_j — ее вес. Тогда суммарные вес и цена задаются выражениями

$$\left. \begin{aligned} C_N &= \sum_{j=1}^N c_j m_j, \\ W_N &= \sum_{j=1}^N w_j m_j. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Задача, которую мы хотим рассмотреть, **состоит** в максимизации общей надежности

$$R_N = \prod_{j=1}^N \varphi_j(m_j) \quad (2.80)$$

по всем m_j при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & m_j = 0, 1, \dots, \\ (b) \quad & \sum_{j=1}^N c_j m_j \leq c, \\ (c) \quad & \sum_{j=1}^N w_j m_j \leq w. \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

28. ВВЕДЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА

Чтобы не иметь дела с последовательностями функций двух переменных, введем множитель Лагранжа. Рассмотрим новую задачу максимизации выражения

$$\left[\prod_{j=1}^N \varphi_j(m_j) \right] e^{-\lambda \sum_{j=1}^N m_j w_j} \quad (2.82)$$

по всем m_j , удовлетворяющим только первым двум ограничениям (2.81). Полагая $f_N(c)$ равной этому максимальному значению, где c то же, что в (2.81,b), получаем рекуррентное соотношение

$$f_N(c) = \max_{0 \leq m_N \leq [c/c_N]} [\varphi_N(m_N) e^{-\lambda m_N w_N} f_{N-1}(c - m_N c_N)] \quad (2.83)$$

для $N=2, 3, \dots$ и соотношение

$$f_1(c) = \max_{0 \leq m_1 \leq [c/c_1]} [\varphi_1(m_1) e^{-\lambda m_1 w_1}]. \quad (2.84)$$

Еще раз отметим, что каждое m_i может принимать только значения 0, 1, 2, ...

29. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Численное решение задач упомянутого выше вида может быть получено совсем просто. (Блок-схема программы дана в § 30.)

Для иллюстрации рассмотрим устройство с четырьмя типами компонент, для которых цены, веса и вероятности успешного функционирования даются таблицей 2.5.

Как и раньше, предположим, что может быть использован каждый из этих четырех типов компонент. Кроме того, если

Т а б л и ц а 2.5

Тип компоненты	Цена	Вес	Вероятность успешной работы
1	5	8	0,90
2	4	9	0,75
3	9	6	0,65
4	7	7	0,80
5	7	8	0,85

использованы m_j дополнительных компонент j -го типа, вероятность успешной работы j -й ступени дается формулой

$$\varphi_j(m_j) = 1 - (1 - p_j)^{m_j+1}. \quad (2.85)$$

При допустимом количестве в 100 единиц стоимостных затрат и 104 единицы веса мы хотим определить число элементов каждого типа, которое максимизирует общую вероятность успешного функционирования, задаваемую, как и выше, выражением

$$\prod_{j=1}^5 \varphi_j(m_j). \quad (2.86)$$

Начав с уравнения

$$f_1(c) = \max_{0 \leq m_1 \leq [c/c_1]} \varphi_1(m_1) e^{-\lambda m_1 w_1}, \quad (2.87)$$

продолжаем по общей формуле

$$f_i(c) = \max_{\{m_i\}} [\varphi_i(m_i) e^{-\lambda m_i w_i} f_{i-1}(c - m_i c_i)],$$

для $i = 2, 3, \dots$, где

$$0 \leq m_j \leq \left\lfloor \frac{c}{c_j} \right\rfloor. \quad (2.88)$$

Величину λ надо определить так, чтобы $\sum_{i=1}^5 m_i w_i = 104$.

Начав с $\lambda = 0,001$, мы получим:

$$f_5(100) = \prod_{i=1}^5 \varphi_i(m_i) \exp(-\lambda m_i w_i) = 0,8882, \quad (2.89)$$

и значения $m_1=2$, $m_2=3$, $m_3=4$, $m_4=2$, $m_5=2$, с общим весом $\sum_{i=1}^5 m_i w_i = 97$. Вероятность успешной работы равна $0,8882 \cdot e^{97\lambda} = 0,977$.

Теперь уменьшим λ до 0,0008 с тем, чтобы **увеличить** общий использованный вес. Результат таков:

$$f_8(100) = 0,9063,$$

$$m_1=2, \quad m_2=3, \quad m_3=4, \quad m_4=3, \quad m_5=2,$$

$$\sum_{i=1}^5 m_i w_i = 104.$$

Вероятность успешной работы равна $(0,9063 \cdot e^{104\lambda}) = 0,984$. Это и есть решение задачи. Машинное время, затраченное на вычисление, составило 4 минуты. Стоит заметить, что эта же самая задача с пятьюдесятью типами компонент потребовала бы приблизительно 50 минут, так как время, требуемое для решения задачи таким способом, по существу, пропорционально числу типов компонент *). Причина, по которой мы не говорим «прямо пропорционально», — в необходимости поиска истинного значения λ .

30. БЛОК-СХЕМА ПРОГРАММЫ (см. рис. 26)

31. ОБОБЩЕНИЕ

Рассмотрим теперь более близкий к действительности вариант предыдущей задачи. Вместо предположения о том, что мы свободны в выборе только числа компонент, предположим, что у нас имеется выбор типа компонент, используемых в каждой ступени, скажем, выбор между типом A и типом B . Пусть $c_i(A)$ и $w_i(A)$ обозначают стоимость и вес одной компоненты типа A в i -й ступени; $c_i(B)$ и $w_i(B)$ — соответствующие величины для компоненты типа B . Мы могли бы при желании учесть возможность комбинаций типов компонент в каждой ступени, сохранив в силе последующие рассуждения.

Как и раньше, мы хотим при заданных общих ограничениях по стоимости и весу определить, какой тип компоненты

*) Точнее, числу ступеней. (Прим. ред.)

Вводимые числовые данные

c_{\max} — начальный капитал
 λ — множитель Лагранжа
 N_{\max} — число элементов

Вывод N таблиц

Таблица оптимальных вероятностей
 Таблица оптимального числа элементов
 Таблица накопленного веса

Вводимые таблицы

Вероятности для каждого элемента
 Стоимость каждого элемента
 Вес каждого элемента
 Максимальное число элементов каждого вида

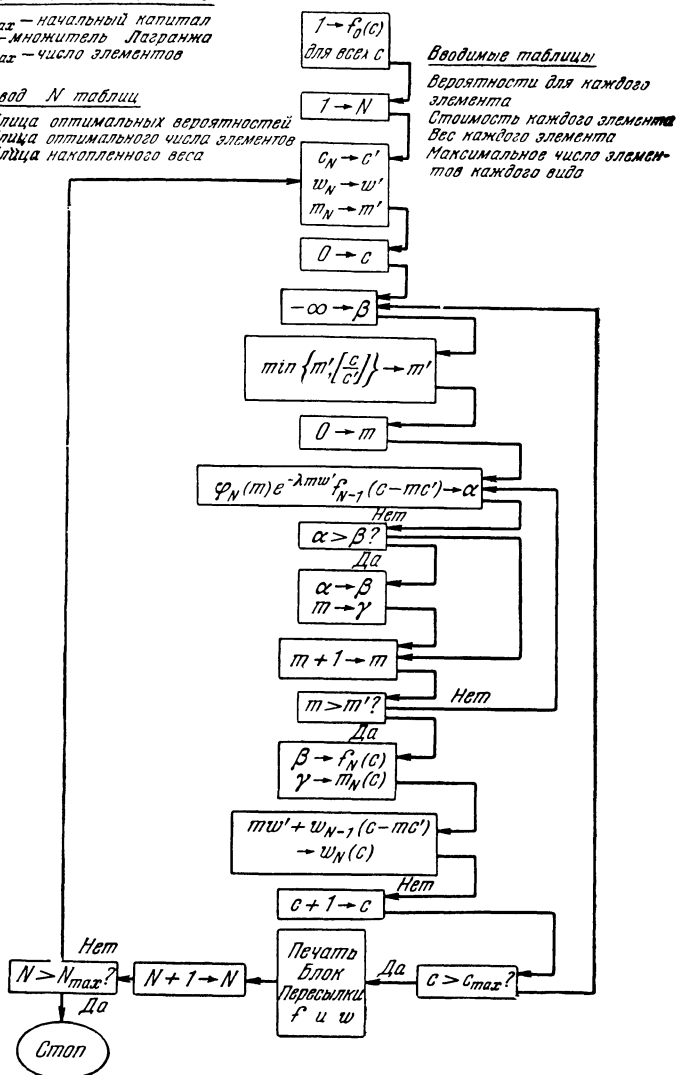


Рис. 26.

и в каком количестве использовать в каждой ступени, чтобы максимизировать надежность устройства. Пусть

$$\varphi_i(m_i; A), \quad \varphi_i(m_i; B)$$

обозначают надежность i -й ступени, когда параллельно используются m_i компонент типа A и B соответственно.

Как и выше, рассмотрим последовательность функций $\{f_N(c, \omega)\}$, где $f_N(c, \omega)$, по определению, есть максимальная надежность N -ступенного устройства при ограничениях c по стоимости и ω по весу. Тогда

$$f_1(c, \omega) = \max [\max_{m_1} \varphi_1(m_1; A), \max_{m_1} \varphi_1(m_1; B)], \quad (2.90)$$

где в первом выражении область изменения

$$1 \leq m_1 \leq \min \{[c/c_1(A)], [\omega/\omega_1(A)]\},$$

а во втором —

$$1 \leq m_1 \leq \min \{[c/c_1(B)], [\omega/\omega_1(B)]\}.$$

Как и прежде, m_1 может принимать только значения $1, 2, \dots$

Для произвольного N имеем рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} f_N(c, \omega) = & \max \{ \max_{m_N} \varphi_N(m_N; A) \times \\ & \times f_{N-1}[c - c_N(A) m_N, \omega - \omega_A(A) m_N]; \max_{m_N} \varphi(m_N; B) \times \\ & \times f_{N-1}[c - c_N(B) m_N, \omega - \omega_N(B) m_N] \}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

где в первом выражении

$$1 \leq m_N \leq \min \{[c/c_N(A)], [\omega/\omega_N(A)]\}, \quad (2.92)$$

и во втором

$$1 \leq m_N \leq \min \{[c/c_N(B)], [\omega/\omega_N(B)]\}. \quad (2.93)$$

В обоих случаях m_N может принимать только целые значения $1, 2, \dots$

Выяснив, как формулируется двумерный вариант задачи, мы можем ввести множитель Лагранжа и поступать, как выше, чтобы получить одномерный вариант.

32. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ХИЧКОКА — КУПМАНСА

В математической экономике большое значение имеет задача наиболее эффективного перемещения ресурсов из одного пункта в другой. Это — один частный случай общей проблемы определения структуры оптимальной сети (где, конечно, понятие «оптимальности» зависит от того, как будет использоваться сеть). Задачи такого типа постоянно возникают в экономической, индустриальной, вычислительной областях, в области электроники, связи и организации. Относительно немногие из этих захватывающих топологических задач рассматривались детально, и ни одна из них не поддавалась простому анализу.

Модель, которую мы будем подробно обсуждать, называется транспортной моделью Хичкока — Купманса, хотя она независимо изучалась Канторовичем и Ароншайном.

Эта частная задача была предметом широких исследований, в результате которых в настоящее время мы располагаем целым рядом остроумных и мощных методов (принадлежащих Данцигу, Фладу, Форду и Фулкерсону) для анализа некоторых важных специальных случаев; ссылки имеются в конце этой главы. Мы рассмотрим здесь другой частный случай более общей задачи, который особенно хорошо поддается рассмотрению с помощью функциональных уравнений. Накладываемые ограничения позволяют нам рассмотреть более близкие к реальным процессы, которые не могут быть обслужены методами, развитыми для линейных моделей.

Мы покажем, что транспортную задачу Хичкока — Купманса можно трактовать как процесс распределения, к которому может быть применен метод функциональных уравнений — как непосредственно, так и в сочетании с методом множителей Лагранжа. С методической точки зрения этот процесс предоставляет нам удобный случай ввести другой мощный математический аппарат — *метод последовательных приближений*. Мы детально обсудим эти вопросы ниже, вместе с результатами нескольких численных экспериментов. Комбинируя эти два метода анализа — функциональные уравнения и последовательные приближения, — мы можем надеяться получить решение довольно сложных задач.

33. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОГО ПРОЦЕССА

Назовем пункты, в которых сосредоточены ресурсы, *складами* и пункты, в которых существует спрос на эти ресурсы, *пунктами потребления*. Иногда, и более образно, их называют соответственно *источники* и *стоки* (потребители). Мы можем считать их расположенными следующим образом:

Склады	Пункты потребления
$i = 1 : D_1$	$j = 1 : P_1$
$2 : D_2$	$2 : P_2$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
$M : D_M$	$N : P_N$

хотя, конечно, такое приятное расположение не является ни необходимым, ни реально возможным.

Нас будет интересовать только тот случай, когда либо число складов, либо число пунктов потребления мало, хотя мы и будем формулировать процесс в общих терминах. Если одно из этих чисел мало, другое может быть сколь угодно большим — это не повлияет на возможность решения задачи. В дальнейшем будем предполагать, что имеется один вид ресурсов, и введем следующие величины:

$$\left. \begin{array}{l} x_i — \text{запасы этого ресурса на } i\text{-м складе, } i = 1, \dots, M, \\ r_j — \text{спрос на этот ресурс в } j\text{-м пункте потребления,} \\ j = 1, \dots, N. \end{array} \right\} \quad (2.94)$$

Предполагая, что общий запас равен общему спросу, т. е. что задача состоит только в распределении, будем иметь:

$$\sum_i x_i = \sum_j r_j. \quad (2.95)$$

Хотя, как мы увидим, более общая задача, когда запасы превышают спрос, может изучаться теми же методами, в случае равенства происходит существенное упрощение. Этот вопрос будет обсуждаться в § 37.

Пусть

$$x_{ij} — \text{количество ресурсов, отправляемое из } i\text{-го склада в } j\text{-й пункт потребления,} \quad (2.96)$$

и

$$g_{ij}(x_{ij}) — \text{стоимость осуществления этой операции.} \quad (2.97)$$

Величины x_{ij} подчинены трем ограничениям:

- (a) *Неотрицательность.*
- (b) *Ограничение на запасы:* общее количество ресурсов, отправленное из любого склада, должно равняться запасам на этом складе. (2.98)
- (c) *Ограничение на спрос:* общее количество ресурсов, отправленное в любой пункт потребления, должно равняться спросу в этом пункте.

Отметим, что мы исключаем транспортировку через перевалочные пункты, т. е. мы не можем перемещать ресурсы из одного склада в другой и затем в пункт потребления или из склада в пункт потребления и затем в другой пункт потребления.

Предыдущие словесные ограничения дают следующие соотношения:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} & x_{ij} \geq 0, \\ \text{(b)} & \sum_{j=1}^N x_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ \text{(c)} & \sum_{i=1}^M x_{ij} = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right\} \quad (2.99)$$

Итак, мы пришли к задаче, которая состоит в определении величин x_{ij} , удовлетворяющих предшествующим условиям, так, чтобы минимизировать общую стоимость перемещения ресурсов

$$C_{MN} = \sum_{i,j} g_{ij}(x_{ij}). \quad (2.100)$$

34. ОБСУЖДЕНИЕ

Ясно, что эта задача весьма сложна, если не ввести дальнейших ограничений на вид функций $g_{ij}(x)$; но даже тогда она остается сложной, если M и N велики. Особенно инте-

ресен — сам по себе и как отправная точка для дальнейших исследований — случай, когда стоимость перевозки из любого склада в любой пункт потребления прямо пропорциональна перевозимому количеству, т. е.

$$g_{ij} = d_{ij} x_{ij}. \quad (2.101)$$

Коэффициент d_{ij} можно интерпретировать как *расстояние*.

Задача минимизации становится тогда задачей из области *линейного программирования*, и, как отмечалось выше, имеется много изящных и быстрых алгоритмов для ее решения как вручную, так и с помощью вычислительных машин.

Но эти методы неприменимы, если функции стоимости нелинейны, за исключением тех случаев, когда функции $g_{ij}(x)$ обладают определенными простыми структурными свойствами, дающими возможность тем или иным образом эффективно провести линейную аппроксимацию.

35. ПОДХОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Начнем с рассмотрения случая, когда имеются два склада и произвольное число пунктов потребления.

Склады	Пункты потребления
$D_1 : x_1$	$P_1 : r_1$
	$P_2 : r_2$
	.
$D_2 : x_2$.
	.
	$P_{N-1} : r_{N-1}$
	$P_N : r_N$

Ключ к задаче — в том, что можно удовлетворять спрос по очереди, начиная с пункта P_N , затем переходя к P_{N-1} , и т. д. Как обычно, мы превращаем статический процесс в динамический с тем, чтобы применить метод функциональных уравнений.

Введем затем функции $f_N(x_1, x_2)$, определенные для $N=1, 2, \dots, x_1, x_2 \geq 0$ следующим образом:

$$f_N(x_1, x_2) — \text{величина затрат при использовании оптимальной политики, когда начинают соответственно с количеств } x_1, x_2 \text{ на складах } D_1 \text{ и } D_2, \text{ при фиксированных потребностях } r_1, r_2, \dots, r_N \text{ соответственно в пунктах потребления } P_1, P_2, \dots, P_N. \quad (2.102)$$

Удовлетворяя первым спрос в N -м пункте потребления, мы понесем затраты

$$g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}) \quad (2.103)$$

и уменьшим запасы ресурсов на складах D_1 и D_2 до $x_1 - x_{1N}$ и $x_2 - x_{2N}$. Используя принцип оптимальности, получим для $N \geq 2$ рекуррентное соотношение

$$f_N(x_1, x_2) = \min_{\{R_N\}} [g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}) + f_{N-1}(x_1 - x_{1N}, x_2 - x_{2N})], \quad (2.104)$$

где R_N — двумерная область, определяемая условиями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_{1N} + x_{2N} = r_N \\ (b) \quad & 0 \leq x_{1N} \leq x_1 \\ (c) \quad & 0 \leq x_{2N} \leq x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Для $N=1$ имеем:

$$f_1(x_1, x_2) = g_{11}(x_1) + g_{21}(x_2). \quad (2.106)$$

36. ОБСУЖДЕНИЕ

Ясно, что этот же самый метод может быть применен для трактовки аналогичной задачи с более чем двумя складами. Но если заботиться о численном решении, то при $M \geq 3$ мы столкнемся с обычными трудностями, вызванными размерностью задачи.

В следующих параграфах мы обсудим некоторые приемы, которые можно использовать для преодоления этих трудностей.

37. Понижение размерности

До сих пор мы не использовали дополнительную информацию о том, что запасы равны спросу, т. е. что

$$x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^N r_i. \quad (2.107)$$

Отсюда следует, что при фиксированном спросе величину x_2 можно определить всякий раз, когда известна x_1 . Следовательно, мы можем исключать параметр состояния x_2 и просто написать:

$$f_N(x_1, x_2) \equiv f_N(x_1). \quad (2.108)$$

Соотношение (2.104) перейдет в

$$\begin{aligned} f_N(x_1) = \min_{x_{1N}} [g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(r_N - x_{1N}) + \\ + f_{N-1}(x_1 - x_{1N})], \end{aligned} \quad (2.109)$$

где x_{1N} удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 0 \leq x_1 - x_{1N} \\ (b) \quad & 0 \leq r_N - x_{1N} \leq \sum_{i=1}^N r_i - x_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

Областью изменения переменной x_1 в $f_N(x_1)$ служит $\left[0, \sum_{i=1}^N r_i\right]$.

Таким же образом общая задача, включающая M складов, может быть сведена к вычислению последовательности функций $M - 1$ переменных. Следовательно, задачи с двумя складами совсем просты; задачи с тремя складами доступны непосредственному решению; решение задач с четырьмя и более складами требует использования специальных приемов.

38. УВЕЛИЧЕНИЕ ШАГА СЕТКИ

В связи с предыдущими замечаниями обратим внимание на то, что один из способов обойти трудности, связанные с размерностью, состоит в увеличении шага сетки. В задаче с двумя параметрами состояния можно позволить каждой переменной принимать 100 различных значений, так как это

потребуется всего 10^4 ячеек. Современным машинам (примерно 1960 г.) доступны задачи с такими требованиями к памяти. Следует напомнить, что память, необходимая, собственно, для осуществления процесса динамического программирования, составляет приблизительно треть объема памяти машины благодаря тому, что мы имеем дело одновременно со «старой» функцией дохода $f_{N-1}(p)$, «новой» функцией дохода $f_N(p)$ и новой функцией политики $x_N(p)$. Если имеются несколько функций политики, множитель одна треть должен быть еще уменьшен.

С другой стороны, если имеются три параметра состояния, то при 100 различных значениях каждой переменной требовалась бы память, способная хранить 10^6 значений, что превосходит возможности сегодняшнего дня. Но если использовать вместо ста только 20 различных значений для каждой переменной, то потребуется всего 8×10^3 значений, и задача будет еще в пределах наших возможностей. Следовательно, всегда можно работать с функциями многих переменных, «прореживая» область изменения каждой переменной.

Конечно, ценой этого является меньшая точность. Впоследствии мы обсудим, как избежать потери точности при таком подходе, в связи с методом последовательных приближений.

39. ПРИМЕНЕНИЕ МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА К ЗАДАЧЕ С ТРЕМЯ СКЛАДАМИ

Как мы уже отмечали, если имеются три склада, то с вычислительной точки зрения задачу можно рассматривать в терминах последовательностей функций двух переменных. Но если ввести множитель Лагранжа, задача сведется к вычислению последовательности функций одной переменной. Займемся теперь этим детально.

Рассмотрим задачу с тремя складами, в которой имеется количество x_1 на первом складе и неограниченные количества на втором и третьем складах:

$$\begin{array}{ll} D_1 : x_1 & P_1 : r_1 \\ D_2 : \infty & P_2 : r_2 \\ D_3 : \infty & \vdots \\ & P_{N-1} : r_{N-1} \\ & P_N : r_N \end{array}$$

Предположим, что стоимость перевозки такая же, как и выше, и что за каждую единицу, перевезенную из D_3 , мы платим дополнительно λ , и за каждую единицу, перевезенную из D_3 , дополнительно платим 1.

В этом случае общие издержки задаются выражением

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N g_{ij}(x_{ij}) + \lambda \sum_{j=1}^N x_{2j} + \sum_{j=1}^N x_{3j}. \quad (2.111)$$

Первой мыслью читателя может быть мысль о том, что следовало бы использовать два множителя Лагранжа. Однако в этом нет необходимости, что видно из следующих соображений. Допустим, что λ меняется до тех пор, пока для минимизирующих значений x_{ij} мы не будем иметь равенства

$\sum_{j=1}^N x_{2j} = x_2$. Тогда автоматически получим:

$$\sum_{j=1}^N x_{3j} = x_1 + x_2 - \sum_{j=1}^N r_j, \quad (2.112)$$

т.е. $\sum_{j=1}^N x_{3j}$ является фиксированной величиной, так как запасы равны спросу. Следовательно, при желании мы могли бы совсем исключить третий член в (2.111).

Положим $f_N(x_1)$ равной наименьшему значению функции (2.111), где минимум берется по области

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{j=1}^N x_{1j} = x_1, \\ (b) \quad & x_{1j}, x_{2j}, x_{3j} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

Чтобы получить рекуррентное соотношение для f_N , мы, как и раньше, удовлетворим сначала спрос в N -м пункте потребления.

Мы приходим к уравнению

$$f_N(x_1) = \min_{R_N} [g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}) + g_{3N}(x_{3N}) + \\ + \lambda x_{2N} + x_{3N} + f_{N-1}(x_1 - x_{1N})], \quad (2.114)$$

где R_N — область, задаваемая условиями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_{1N} + x_{2N} + x_{3N} = r_N, \\ (b) \quad & 0 \leq x_{1N} \leq x_1, \\ (c) \quad & x_{2N}, x_{3N} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Минимизация по переменным x_{2N} и x_{3N} может быть выполнена заранее в явном виде или численно. Пусть

$$g_N(x_{1N}; \lambda) = \min_{S_N} [g_{2N}(x_{2N}) + g_{3N}(x_{3N}) + \lambda x_{2N} + x_{3N}], \quad (2.116)$$

где S_N — новая область, определяемая условиями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & x_{2N} + x_{3N} = r_N - x_{1N}, \\ (b) \quad & x_{2N}, x_{3N} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

Тогда рекуррентная формула (2.114) примет вид

$$f_N(x_1) = \min_{0 \leq x_{1N} \leq r_N} [g_{1N}(x_{1N}; \lambda) + g_N(x_{1N}; \lambda) + f_{N-1}(x_1 - x_{1N})]. \quad (2.118)$$

Параметр λ теперь изменяется между $-\infty$ и $+\infty$, пока общее количество, перевозимое из D_2 , не станет равным x_2 — начальному уровню ресурсов в D_2 . Перевозимое из D_3 количество будет тогда автоматически равняться $x_3 = \sum_{j=1}^N r_j - x_1 - x_2$.

40. ПРИМЕР 1 — ДВА СКЛАДА, ДЕСЯТЬ ПУНКТОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ

В первом численном примере — перевозка из двух складов в десять пунктов потребления — мы будем считать, что стоимость перевозки представляет собой квадратичную функцию от перевозимого количества плюс «организационные» расходы. Под «организационными» расходами мы понимаем затраты, не зависящие от перевозимого количества и равные нулю, когда перевозка не производится. Стоимости приведены в таблице 2.6.

Т а б л и ц а 2.6

Потребители	Из склада 1			Из склада 2			Спрос
	организационные расходы	x	x^2	организационные расходы	x	x^2	
1	1	1,0	0,01	2	3,1	0,1	10
2		2,0			4,1		25
3		3,0			2,1		45
4		1,5			1,1		15
5	10	2,5	-0,01		2,6	0,2	5
6		5,0			3,0		15
7		3,0		5	1,0		20
8	8	6,0	-0,05		2,0	0,01	15
9		6,0			2,0		10
10		6,0			5,0		20

Этой таблицей надо пользоваться следующим образом. Каждая функция $g_{ij}(x)$ имеет вид

$$g_{ij}(x) = a_{ij}x + b_{ij}x^2 + c_{ij}(x), \quad (2.119)$$

где $c_{ij}(x)$ — то, что обычно называют «организационными» расходами, или «постоянными издержками»; $c_{ij}(x)$ равно 0, если $x=0$, и равно постоянной c_{ij} , если $x>0$.

Коэффициент при x ищется в столбце « x », коэффициент при x^2 — в столбце « x^2 », «организационные» расходы — в столбце с соответствующим названием.

Т а б л и ц а 2.7

Потребители	Из склада 1	Из склада 2	Издержки	Накопленные издержки
1	10	0	10,00	10,00
2	25	0	51,00	61,00
3	5	40	99,25	160,25
4	15	0	22,50	182,75
5	5	0	12,50	195,25
6	0	15	45,00	240,25
7	20	0	60,00	300,25
8	0	15	30,00	330,25
9	0	10	20,00	350,25
10	20	0	120,00	470,25

Так, стоимость перевозок количества x из склада 1 к потребителю 3 равна $3x + 0,01x^2$; из склада 1 к потребителю 2 равна $1 + 2x$, если $x > 0$, и 0, если $x = 0$.

Предположим, что надо перевезти 100 единиц из склада 1 и 80 единиц из склада 2. Оптимальное решение приведено в таблице 2.7.

Расчет на вычислительной машине Джонниак Корпорации RAND занял 2 минуты для вычислений и 4 минуты для вывода результатов.

41. БЛОК-СХЕМА ПРОГРАММЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ СКЛАДОВ (см. рис. 27)

42. ПРИМЕР II—ТРИ СКЛАДА, ДЕСЯТЬ ПУНКТОВ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Добавим к примеру I третий склад. Показатели стоимости его перевозок приведены в таблице 2.8.

Таблица 2.8

Потребители	Организационные расходы	Из склада 3		Спрос
		x	x^2	
1		7		25
2		3		40
3		9		60
4		1		30
5		1		20
6	5	2		30
7		4		35
8	6	3		30
9		5		25
10		6		40

На складе 3 имеются 155 дополнительных единиц и, как показано выше, на такую же величину увеличен спрос. При использовании метода множителей Лагранжа выбор $\lambda = 2,0$ дает нужный результат. Оптимальное решение приведено в таблице 2.9.

Т а б л и ц а 2.9

Погребители	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Издержки	Накопленные издержки
1	25	0	0	25,00	25,00
2	40	0	0	81,00	106,00
3	5	55	0	130,75	236,75
4	0	0	30	30,00	266,75
5	0	0	20	20,00	286,75
6	0	0	30	65,00	351,75
7	30	0	5	110,00	461,75
8	0	0	30	96,00	557,75
9	0	25	0	50,00	607,75
10	0	0	40	240,00	847,75

Расчет для каждого значения λ занял 7 минут.

43. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ — I

Одним из путей преодоления трудностей, связанных с размерностью, является привлечение наиболее мощного из всех средств анализа — метода последовательных приближений.

Схема метода в общих чертах выглядит следующим образом. Для заданного функционального уравнения мы угадываем решение. Если предполагаемое решение не является истинным, то мы делаем поправку, определяемую самим функциональным уравнением, надеясь получить таким путем лучшее приближение к решению. Процесс продолжается до тех пор, пока мы или не получим решение или не подойдем к нему с требуемой степенью точности.

Один из путей использования этого подхода состоит в следующем. Пусть заданное уравнение, решение которого мы ищем, имеет вид

$$T(u) = 0 \quad (2.120)$$

и пусть уравнение $S(u) = 0$ легче решить. Запишем исходное уравнение в виде

$$S(u) = S(u) - T(u), \quad (2.121)$$

и пусть за первое приближение u_0 взято решение уравнения $S(u) = 0$. Пусть следующее приближение u_1 определяется из уравнения

$$S(u_1) = S(u_0) - T(u_0) \quad (2.122)$$

и вообще $(n+1)$ -е приближение получается из n -го приближения с помощью уравнения

$$S(u_{n+1}) = S(u_n) - T(u_n). \quad (2.123)$$

Если $S(u)$ выбрано подходящим образом и $T(u)$ обладает соответствующими свойствами, то последовательность $\{u_n\}$ будет сходиться к решению уравнения $T(u) = 0$.

Много работ посвящено применению этого метода к исследованию дифференциальных уравнений — как обыкновенных, так и в частных производных; кроме того, сделаны некоторые предварительные попытки применения его к функциональным уравнениям динамического программирования. Ссылки на соответствующие результаты и методы даны в конце главы.

Однако в соответствии с нашей общей программой мы будем действовать формально, просто демонстрируя различные подходы. Для иллюстрации конкретных применений метода будут приведены результаты некоторых численных расчетов.

Имеется много разных путей применения основных идей, но эта область фактически еще не исследована.

44. ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИТИК

Прототипом уравнения динамического программирования в общем виде является уравнение

$$f(p) = \max_q [g(p, q) + f(T(p, q))]. \quad (2.124)$$

Здесь p — параметр состояния, а q — решение. Классический подход к этому уравнению в обычной ситуации, когда нельзя найти точное аналитическое решение, заключается в угадывании начальной функции $f_0(p)$, а затем в определении последовательности функций с помощью рекуррентного соотношения

$$f_{n+1}(p) = \max_q [g(p, q) + f_n(T(p, q))], \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.125)$$

В общем нетрудно установить сходимость этой последовательности к решению уравнения (2.124), кроме того, условия, обеспечивающие сходимость, обычно гарантируют также и единственность решения.

Заметим, что в уравнение (2.124) входят в действительности две неизвестные функции: *функция дохода* $f(p)$ и *функция*

политики $q(p)$. Они, конечно, не являются независимыми, так как одна определяет другую. При заданной функции дохода $f(p)$ функция политики определяется с помощью операции максимизации правой части уравнения (2.124), при заданной функции политики $q(p)$ функция $f(p)$ определяется как решение уравнения

$$f(p) = g(p, q) + f(T(p, q)), \quad (2.126)$$

где $q = q(p)$. Это уравнение обычно разрешается прямым итерированием. Признание равноценности двух функций $f(p)$ и $q(p)$ дает нам возможность сильно увеличить сферу действия метода последовательных приближений. В дополнение к предложенному выше способу приближения с помощью соотношения (2.125), мы можем рассмотреть новый тип приближения, представляющий особый интерес для теории многошаговых процессов решения, *приближения в пространстве политик*.

Вместо того чтобы начинать с угадывания вида функции $f(p)$, мы будем начинать с угадывания вида функции $q(p)$.

Соответствующая функция дохода $f_0(p)$ определяется как решение уравнения

$$f_0(p) = g(p, q_0) + f_0(T(p, q_0)), \quad (2.127)$$

где $q_0 = q_0(p)$. Чтобы получить лучшее приближение, определяем $q_1 = q_1(p)$ как функцию, максимизирующую выражение

$$g(p, q) + f_0(T(p, q)), \quad (2.128)$$

а затем определяем $f_1(p)$ с помощью соотношения

$$f_1(p) = g(p, q_1) + f_1(T(p, q_1)). \quad (2.129)$$

Продолжая таким образом, получим две последовательности: $\{q_n(p)\}$ и $\{f_n(p)\}$. Во многих случаях легко доказать монотонную сходимость

$$f_0(p) \leq f_1(p) \leq \dots \quad (2.130)$$

В общем, приближение в пространстве политик тем или иным способом будет монотонным приближением. Интересным в этом понятии приближения является то, что оно может быть применено ко многим уравнениям, совсем не связанным с процессами решения. В таком виде он составляет основу метода, называемого *квазилинеаризацией*.

На следующих страницах мы рассмотрим некоторые примеры приближения в пространстве политик и приведем численные результаты.

45. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ — II

Вернемся к процессу распределения, описанному в § 2. Мы хотим максимизировать функцию

$$f_N(x, y) = \sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i) \quad (2.131)$$

при условиях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \sum_{i=1}^N x_i = x, \quad x_i \geq 0, \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^N y_i = y, \quad y_i \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

Пусть $x^0 = \{x_i^0\}$ — начальное приближение для множества значений x_i . Это есть приближение в «пространстве политик». Затем определяем максимум функции

$$R_N(x, y) = \sum_{i=1}^N g_i(x_i^0, y_i) \quad (2.133)$$

по всем y_i , удовлетворяющим условию (2.132,b), используя обычное одномерное рекуррентное соотношение

$$f_N(y) = \max_{0 \leq y_N \leq y} [g_N(x_N^0, y_N) + f_{N-1}(y - y_N)], \quad (2.134)$$

где $N = 2, 3, \dots$ и

$$f_1(y) = g_1(x_1^0, y). \quad (2.135)$$

Этот процесс дает для каждого значения y множество значений y_i , $y^0 = \{y_i^0\}$. Используя эти значения y_i , которые мы называем y_i^0 , рассматриваем задачу максимизации функции

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_i, y_i^0) \quad (2.136)$$

по всем значениям x_i , удовлетворяющим условию (2.132, a). Эта задача решается с помощью рекуррентного соотношения, аналогичного (2.134).

Таким путем мы получаем множество значений x_i , $x^1 = \{x_i^1\}$. Повторяя теперь этот процесс, получим пару последовательностей $\{x^n\}$, $\{y^n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Ясно, что последовательность значений $\{R_N(x^n, y^n)\}$ — монотонно возрастающая. Однако эта последовательность вовсе не обязана сходиться к абсолютному максимуму. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, функцию двух переменных $z = g(x, y)$, изображаемую поверхностью вида, показанного на рис. 28.

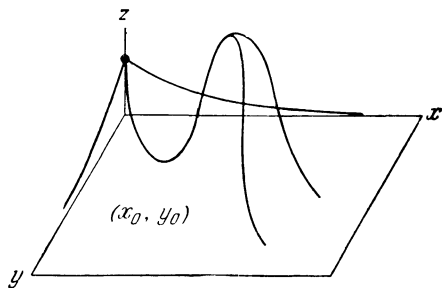


Рис. 28.

Хотя абсолютный максимум находится в точке (x_0, y_0) , если мы примем за начальное приближение $x = 0$, то в описанном выше процессе максимизации сначала по x , затем по y , затем снова по x и т. д. мы застрянем в точке $(0, 0)$ — точке относительного максимума (см. § 51).

С другой стороны, если начальное приближение взято достаточно близким к точке (x_0, y_0) , то приведенный выше метод будет сходиться к требуемой точке (x_0, y_0) .

В любом случае этот метод может быть использован для проверки того, дает ли конкретный выбор значений x_i и y_i *относительный максимум*, и если нет, то имеет ли место сходимость к ближайшему относительному максимуму. Если исходить из начальных векторов $\{x^0, y^0\}$, достаточно удаленных друг от друга, то мы можем ожидать, что таким путем определится целый ряд относительных максимумов и, как можно надеяться, среди них абсолютный максимум.

Задача выделения абсолютного максимума из относительных максимумов является бичом в области оптимизации. Нельзя ожидать, что она будет когда-либо разрешена одним ударом. Можно надеяться лишь присоединять класс задач за классом к нашей коллекции «укрошенных зверей».

46. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ — III

Рассмотрим теперь другое применение последовательных приближений, при котором мы используем непрерывность изменения значения, доставляющего максимум.

Рассмотрим задачу, описанную в § 2, и отметим зависимость положения максимизирующей точки от x и y . Как можно показать на простом примере, эта зависимость не обязана быть равномерно непрерывной. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим одномерный случай. Предположим, что мы имеем функцию $g(x_1, x_2)$ от x_1 и x_2 , максимум которой мы хотим найти в области $x_1 +$

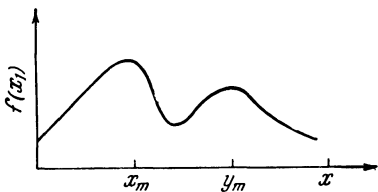


Рис. 29.

$+ x_2 = x$, $x_1, x_2 \geq 0$. Обозначим $f(x_1) = g(x_1, x - x_1)$ и рассмотрим график этой функции (рис. 29) при $0 \leq x_1 \leq x$. В этой области функция имеет два относительных максимума, один из которых является абсолютным максимумом. Если g

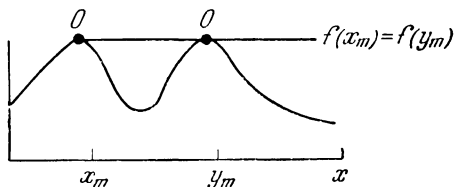


Рис. 30.

непрерывна по x_1 и x_2 , то при изменении x положение точки x_m , доставляющей абсолютный максимум, будет изменяться вместе с x непрерывным образом до тех пор, пока мы не достигнем значения x , при котором график имеет вид, изображенный на рис. 30.

Для этого значения x относительные максимумы равны.

Предположим теперь, что для близкого значения x значение $f(y_m)$ больше, чем $f(x_m)$. В результате положение

абсолютного максимума резко перемещается из окрестности x_m в окрестность y_m . Следовательно, x_m , рассматриваемая как функция от x , может иметь точки разрыва.

Интересный пример такого рода появляется в связи с уравнением

$$f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))]. \quad (2.137)$$

Если

$$\left. \begin{aligned} g(y) &= e^{-10/y}, \\ h(y) &= e^{-15/y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

то функция $f(x)$ является гладкой (рис. 31), в то время как функция политики $y(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 32.

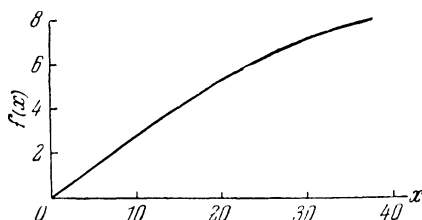


Рис. 31.

При некоторых значениях x происходит резкое изменение в характере оптимальной политики.

Мы копались в этих деталях для того, чтобы должным образом подготовить читателя к трудностям, содержащимся в методе, который будет теперь излагаться. Наша цель сочетать описанный выше метод последовательных приближений с *методом непрерывности*, еще одним основным инструментом аналитика.

Для $x=0$ единственным возможным выбором значений x_i является $x_i=0$, $i=1, 2, \dots, N^*$). Следовательно, задача максимизации по y_i есть задача определения максимума функции

$$R_N(0, y) = \sum_{i=1}^N g_i(0, y_i), \quad (2.139)$$

*) Автор возвращается к рассмотрению задачи (2.131), (2.132). (Прим. ред.)

задача, которую мы решаем с помощью последовательностей функций от одной переменной. Предположим на минуту, что

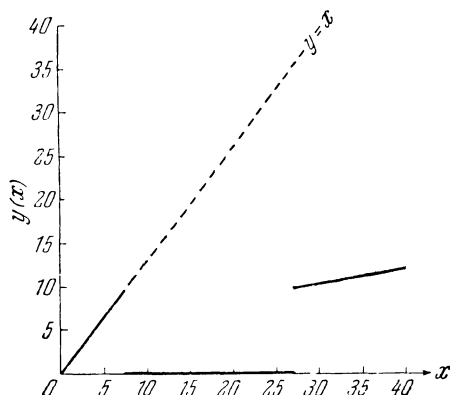


Рис. 32.

она имеет единственное решение $y^0 = \{y_i^0\}$. Для того чтобы решить задачу с ограничениями вида

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &= \Delta, \quad x_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^N y_i &= y, \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

где Δ — «малое», мы исходим из начального приближения $y^0 = \{y_i^0\}$ и приступаем к максимизации по x_i , как описано в предшествующих параграфах. Получив таким путем решение, мы повторяем рассуждения для задачи с ограничениями

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &= 2\Delta, \\ \sum_{i=1}^N y_i &= y, \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

где в качестве начального приближения по y берется y — решение задачи (2.140).

Если мы чувствуем, что этот метод может потребовать слишком много времени, то мы можем использовать прямой метод для решения задачи

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_i &= x_0, \\ \sum_{i=1}^N y_i &= y \end{aligned} \right\} \quad (2.142)$$

для некоторого большого значения x_0 и области значений y , $0 \leq y \leq y_0$, и начать процесс от этой точки.

47. КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ

Иногда можно применять метод последовательных приближений другим способом. Допустим, что мы хотим максимизировать функцию вида

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_i) + \sum_{i=1}^N h_i(x_i) + t \sum_{i=1}^N k_i(x_i, y_i) \quad (2.143)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N x_i = x, \quad \sum_{i=1}^N y_i = y, \quad x_i, y_i \geq 0. \quad (2.144)$$

Здесь t — параметр, который предполагается принимающим все неотрицательные значения. Если $t=0$, задача легко решается на языке двух последовательностей функций от одной переменной.

Поэтому, чтобы решить задачу для малого t , скажем $t=\Delta$, мы используем в качестве начального приближения решение $\{x_i^0, y_i^0\}$, полученное при $t=0$. Приняв $x^0 = \{x_i^0\}$, мы можем упростить задачу поиска, ограничив свое внимание окрестностью точки $y = \{y_i^0\}$. Получив решение, соответствующее $t=\Delta$, мы используем его в качестве начального приближения для случая $t=2\Delta$, и т. д.

Эту идею «развязывания» посредством подходящего приближения можно использовать многими способами; она предоставляет массу возможностей для изобретательности и применения специальных методов.

48. ГРУБАЯ СЕТКА

Другой путь приближения к решению задачи максимизации состоит в первоначальном использовании грубой сетки. Допустим, что мы хотим максимизировать функцию

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (2.145)$$

при ограничении

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = x. \quad (2.146)$$

Пусть для начала x принимает только значения $0, \delta, 2\delta, \dots$, где δ велико по сравнению с нашим обычным шагом сетки. Аналогично, переменным x_i мы позволяем принимать то же множество значений, хотя можно было бы считать x_i принадлежащими также некоторому другому множеству. В результате нахождение решения ускоряется в двух направлениях. Здесь подлежит табулированию меньше значений $f_N(x)$, и процесс поиска максимизирующего x_N на каждом шаге короче.

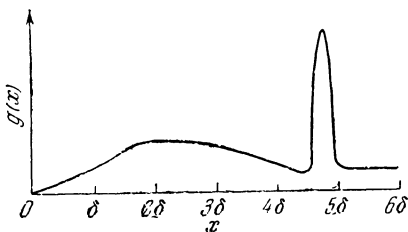


Рис. 33.

Таким образом, мы получаем множество максимизирующих значений $\{x_i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, затабулированных в точках $x = 0, \delta, 2\delta, \dots$

Риск при использовании грубой сетки состоит в том, что можно пропустить очень острый абсолютный максимум и принять за него плоский относительный максимум. Рассмотрим, например, функцию, изображенную на рис. 33.

Поиск при значениях x , равных $0, \delta, 2\delta, \dots$, дает относительный максимум в точке 2δ , но не абсолютный максимум, лежащий между 4δ и 5δ . Примеры, столь яркие, как этот, конечно, маловероятны. Тем не менее мы должны всегда иметь в виду такую возможность.

Предположим, что мы на самом деле определили положение максимума $x_i = x_i(x) = x_i(x; \delta)$ в пределах $\pm \delta$ от положения истинного максимума. Тогда, используя более мелкую сетку, например $0, \Delta, 2\Delta, \dots$, где $\delta = 10\Delta$ или 100Δ ,

мы присоединяем ограничения

$$x_i(x; \delta) - \delta \leq x_i(x) \leq x_i(x; \delta) + \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.147)$$

где $x_i(x; \delta)$ — функции, определенные первоначально при более грубой сетке.

Ограничения такого типа уменьшают требования к объему памяти и существенно сокращают время на определение максимума процессом поиска.

На применение такой идеи мы будем ссылаться в § 11 главы III.

49. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ХИЧКОКА — КУПМАНСА

Вернемся теперь к задаче Хичкока — Купманса вооруженные новыми методами. Мы видели, что процесс с M складами можно рассматривать непосредственно в терминах функций от $M - 1$ переменных и с помощью множителей Лагранжа — в терминах функций от $M - k$ переменных.

Покажем теперь, каким образом можно использовать метод последовательных приближений для анализа этой задачи с помощью последовательностей функций от одной переменной.

Чтобы добиться этого, поступим следующим образом. Прежде всего, пусть запасы на складах D_3, D_4, \dots, D_M распределены так, чтобы любым способом удовлетворить часть требований в точках спроса. Тогда оставшиеся запасы на D_1 и D_2 распределяются таким образом, чтобы удовлетворить оставшимся требованиям при минимальных издержках.

Как мы знаем, решение такой задачи сводится к вычислению последовательностей функций от одной переменной и таким образом может рассматриваться как стандартная операция. Это — первый шаг в методе последовательных приближений. Далее мы используем на складах D_4, \dots, D_M те же распределения, что и выше, на складе D_1 — распределение, определяемое процедурой минимизации, а на складах D_2 и D_3 выбираем распределения так, чтобы удовлетворить оставшимся требованиям с помощью процедуры минимизации. Это — второй шаг.

Далее мы фиксируем распределения на складах D_3, \dots, D_M, D_1 , как выше, используем на складе D_2 распределение, определяемое предшествующей минимизацией, а затем решаем новую задачу минимизации стоимостей перевозки из складов D_3 и D_4 . Затем процесс продолжается таким же образом.

50. СХОДИМОСТЬ

Прежде всего ясно, что последовательность функций минимальных издержек должна сходиться, так как издержки на каждом шаге вычислений не возрастают. Однако неясно, к чему сходится этот процесс, и фактически нетрудно построить примеры, в которых минимум таким путем не достигается.

В обоих приведенных далее примерах наш метод заключается в том, что сначала фиксируется столбец x_{3j} при единственном условии, что $\sum_j x_{3j} = x_3$, но не $x_{3j} > r_j$. В примере I мы распределили запас со склада 3 довольно равномерно по точкам спроса. В примере II мы последовательно удовлетворяем спросы каждого из потребителей до тех пор, пока не исчерпаем запас на складе 3. Затем мы вычитаем из величин спроса всех потребителей полученные ими количества груза и решаем оставшуюся задачу с двумя источниками. Полученное решение мы используем при определении x_{1j} во второй итерации. Это решение определяет x_{2j} для третьей итерации, после которой мы повторяем цикл, фиксируя x_{3j} . Процесс продолжается до тех пор, пока не получится устойчивое распределение во всех трех типах подпроблем.

В приведенных ниже примерах мы рассматриваем случай трех складов и десяти точек спроса.

51. ПРИМЕР 1 — ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ МИНИМУМ

Рассмотрим случай, когда каждая из функций g_{ij} имеет вид

$$g_{ij}(x) = a_{ij}x + b_{ij}x^2 + c_{ij}(x), \quad (2.148)$$

где $c_{ij}(x)$ — «организационные» расходы, или фиксированные издержки, равные нулю, если $x = 0$, и постоянной c_{ij} , если $x > 0$.

Коэффициенты a_{ij} приведены в столбце (x) таблицы 2.10, а b_{ij} — в столбце (x^2).

Т а б л и ц а 2.10

Потребитель	Источник 1			Источник 2			Источник 3			Спрос
	организационные расходы	x	x^2	организационные расходы	x	x^2	организационные расходы	x	x^2	
1		+1,0		+2,0	+3,1			+7,0		25
2	+1,0	+2,0			+4,1			+3,0		40
3		+3,0	+0,01		+2,1			+9,0		60
4		+1,5			+1,1	+0,10		+1,0		30
5		+2,5			+2,6			+1,0		20
6	+10,0	+5,0	-0,01		+3,0		+5,0	+2,0		30
7		+3,0		+5,0	+1,0	+0,20		+4,0		35
8		+6,0			+2,0		+6,0	+3,0		30
9	+8,0	+6,0	-0,05		+2,0			+5,0		25
10		+6,0			+5,0	+0,01		+6,0		40
										335

x_1 — запас на складе 1 = 100,

x_2 — запас на складе 2 = 80,

x_3 — запас на складе 3 = 155.

Результаты, полученные методом последовательных приближений, приведены ниже в таблице 2.11.

Т а б л и ц а 2.11

Политика 1				Политика 2			Политика 3			Политика 4		
1	10	0	15	10	15	0	10	15	0	25	0	0
2	25	0	15	25	0	15	40	0	0	40	0	0
3	5	40	15	5	55	0	5	55	0	0	60	0
4	15	0	15	15	0	15	0	0	30	0	0	30
5	5	0	15	5	0	15	0	0	20	0	0	20
6	0	15	15	0	0	30	0	0	30	0	0	30
7	20	0	15	20	0	15	35	0	0	35	0	0
8	0	15	15	0	0	30	0	0	30	0	0	30
9	0	10	15	0	10	15	0	10	15	0	10	15
10	20	0	20	20	0	20	10	0	30	0	10	30
Затраты =				Затраты =			Затраты =			Затраты =		
= 1126,25				= 966,00			= 921,25			= 874,00		

Продолжение табл. 2.11

Политика 5				Политика 6			Политика 7			Точное решение		
1	25	0	0	25	0	0	25	0	0	25	0	0
2	40	0	0	40	0	0	40	0	0	40	0	0
3	0	60	0	0	60	0	0	60	0	5	55	0
4	0	0	30	0	0	30	0	0	30	0	0	30
5	0	0	20	0	0	20	0	0	20	0	0	20
6	0	0	30	0	0	30	0	0	30	0	0	30
7	35	0	0	35	0	0	35	0	0	30	0	5
8	0	0	30	0	0	30	0	0	30	0	0	30
9	0	20	5	0	20	5	0	20	5	0	25	0
10	0	0	40	0	0	40	0	0	40	0	0	40
Затраты = = 853,00				Затраты = = 853,00			Затраты = = 853,00			Затраты = = 847,75		

52. ПРИМЕР II — АБСОЛЮТНЫЙ МИНИМУМ

Рассмотрим теперь случай, когда все функции $g_{ij}(x)$ выпуклые *) и имеют вид $a_{ij}x + b_{ij}x^2$. Числовые данные в примере сведены в таблицу 2.12.

Т а б л и ц а 2.12

Потребитель	Источник 1			Источник 2			Источник 3			Спрос
	организационные расходы	x	x^2	организационные расходы	x	x^2	организационные расходы	x	x^2	
1		1,0	0,20		3,1	0,10		7,0		25
2		2,0	0,06		4,1			3,0	0,04	40
3		3,0	0,01		2,1			9,0		60
4		1,5			1,1	0,10		1,0		30
5		2,5	0,05		2,6			1,0	0,20	20
6		5,0	0,01		3,0			2,0		30
7		3,0			1,0	0,20		4,0		35
8		6,0			2,0			3,0	0,10	30
9		6,0	0,05		2,0			5,0		25
10		6,0			5,0	0,01		6,0		40

x_1 — запас на складе 1 = 100, x_2 — запас на складе 2 = 97, x_3 — запас на складе 3 = 138.

*) В этом случае любой относительный минимум является абсолютным. (Прим. ред.)

Результаты итераций приведены в таблице 2.13.

Т а б л и ц а 2.13

Политика 1	Политика 2	Политика 3	Политика 4
1 0 0 25	0 4 21	15 4 6	12 7 6
2 0 0 40	0 0 40	21 0 19	21 0 19
3 0 0 60	0 60 0	0 60 0	7 53 0
4 17 0 13	17 0 13	0 0 30	0 0 30
5 11 9 0	11 0 9	13 0 7	11 2 7
6 0 30 0	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 32 3 0	32 0 3	35 0 0	33 2 0
8 0 30 0	0 20 10	0 20 10	0 20 10
9 0 25 0	0 13 12	0 13 12	0 13 12
10 40 0 0	40 0 0	16 0 24	16 0 24
Затраты = = 1535,249	Затраты = = 1141,25	Затраты = = 1040,55	Затраты = = 1035,439

Политика 5	Политика 6	Политика 7	Политика 8
1 12 4 9	15 4 6	12 7 6	12 4 9
2 21 0 19	21 0 19	21 0 19	21 0 19
3 7 53 0	7 53 0	12 48 0	12 48 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 11 0 9	13 0 7	13 0 7	13 0 7
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 33 0 2	35 0 0	33 2 0	33 0 2
8 0 20 10	0 20 10	0 20 10	0 20 10
9 0 20 5	0 20 5	0 20 5	0 25 0
10 16 0 24	9 0 31	9 0 31	9 0 31
Затраты = = 1031,24	Затраты = = 1026,44	Затраты = = 1022,089	Затраты = = 1020,69

Продолжение табл. 2.13

Политика 9	Политика 10	Политика 11	Политика 12
1 15 4 6	12 7 6	12 6 7	15 6 4
2 21 0 19	21 0 19	21 0 19	21 0 19
3 12 48 0	17 43 0	17 43 0	17 43 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 13 0 7	13 0 7	13 0 7	13 0 7
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 35 0 0	33 2 0	33 1 1	34 1 0
8 0 20 10	0 20 10	0 22 8	0 22 8
9 0 25 0	0 25 0	0 25 0	0 25 0
10 4 0 36	4 0 36	4 0 36	0 0 40
Затраты = = 1016,89	Затраты = = 1013,04	Затраты = = 1012,44	Затраты = = 1009,64

Политика 13	Политика 14	Политика 15	Политика 16
1 13 8 4	13 7 5	14 7 4	13 8 4
2 21 0 19	21 0 19	20 0 20	20 0 20
3 20 40 0	20 40 0	20 40 0	21 39 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 13 0 7	13 0 7	13 0 7	13 0 7
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 33 2 0	33 2 0	33 2 0	33 2 0
8 0 22 8	0 23 7	0 23 7	0 23 7
9 0 25 0	0 25 0	0 25 0	0 25 0
10 0 0 40	0 0 40	0 0 40	0 0 40
Затраты = = 1007,85	Затраты = = 1007,75	Затраты = = 1007,25	Затраты = = 1006,76

Продолжение табл. 2.13

Политика 17	Политика 18	Политика 19	Политика 20
1 13 8 4	14 8 3	13 9 3	13 8 4
2 20 0 20	20 0 20	20 0 20	20 0 20
3 21 39 0	21 39 0	22 38 0	22 38 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 13 0 7	12 0 8	12 0 8	12 0 8
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 33 2 0	33 2 0	33 2 0	33 2 0
8 0 23 7	0 23 7	0 23 7	0 24 6
9 0 25 0	0 25 0	0 25 0	0 25 0
10 0 0 40	0 0 40	0 0 40	0 0 40
Затраты = = 1006,76	Затраты = = 1006,41	Затраты = = 1006,14	Затраты = = 1006,04

Политика 21	Политика 22	Политика 23	Политика 24
1 14 8 3	13 9 3	13 9 3	14 9 2
2 19 0 21	19 0 21	19 0 21	18 0 22
3 22 38 0	23 37 0	23 37 0	23 37 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 12 0 8	12 0 8	12 0 8	12 0 8
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 33 2 0	33 2 0	33 2 0	33 2 0
8 0 24 6	0 24 6	0 24 6	0 24 6
9 0 25 0	0 25 0	0 25 0	0 25 0
10 0 0 40	0 0 40	0 0 40	0 0 40
Затраты = = 1005,74	Затраты = = 1005,49	Затраты = = 1005,49	Затраты = = 1005,39

Продолжение табл. 2.13

Политика 25	Политика 26	Политика 27	Политика 28
1 13 10 2	13 9 3	13 9 3	13 9 3
2 18 0 22	18 0 22	18 0 22	18 0 22
3 24 36 0	24 36 0	24 36 0	24 36 0
4 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
5 12 0 8	12 0 8	12 0 8	12 0 8
6 0 0 30	0 0 30	0 0 30	0 0 30
7 33 2 0	33 2 0	33 2 0	33 2 0
8 0 24 6	0 25 5	0 25 5	0 25 5
9 0 25 0	0 25 0	0 25 0	0 25 0
10 0 0 40	0 0 40	0 0 40	0 0 40
Затраты = = 1005,36	Затраты = = 1005,26	Затраты = = 1005,26	Затраты = = 1005,26

Интересно отметить, что хотя точность в пределах 4% достигается уже на третьей итерации, для получения абсолютного минимума потребовалось двадцать восемь итераций. Кроме того, если обратиться к двадцать второму и двадцать третьему шагам, то мы видим, что не имеется никакого улучшения, когда зафиксировано распределение на первом складе, но тем не менее при фиксировании распределения на втором складе улучшение имеется.

53. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ИТЕРАЦИЯ

Выше мы действовали заранее определенным циклическим образом, в котором мы выбирали склады (D_1, D_2) , (D_2, D_3) и т. д. Легко построить примеры, когда при таком способе мы приходим к угловым точкам и относительным минимумам. Поэтому может оказаться более целесообразным выбор двух складов на каждом шаге случайным образом.

В более общем случае, когда имеется много складов, необходимо перебрать все возможные комбинации по два склада, чтобы гарантировать, что мы достигли абсолютного минимума.

Все же и тогда в пространствах большого числа измерений можно ожидать ситуаций, когда даже такой тип «субминимизации» не будет гарантировать достижения абсолютного минимума.

54. ВЫВОДЫ

На предшествующих страницах нашей целью было обсудить новые задачи, вызываемые многомерностью. В некоторых случаях мы можем применять стандартный подход при условии, если в нашем распоряжении имеется современная вычислительная машина и мы готовы расходувать определенное время и усилия. В других случаях требования к памяти значительно превосходят возможности наиболее мощных из современных вычислительных машин.

Для того чтобы справиться с многомерными задачами, возникающими при более реалистичном описании экономических процессов распределения, мы должны привлечь более мощные методы классического анализа — метод последовательных приближений и метод непрерывности.

Мы обсудили несколько примеров, чтобы показать, что эти методы можно применять и что в ряде случаев они будут давать удовлетворительные результаты. Далее мы перейдем к рассмотрению дополнительных примеров, которые можно использовать отдельно или совместно с уже рассмотренными. Следует ожидать, что очень сложные процессы потребуют привлечения всех этих средств в совокупности, вместе с использованием классического анализа, линейного и нелинейного программирования и т. д.

При рассмотрении этих процессов мы встретимся с задачей метапрограммирования, в которой одной из главных трудностей будет определение того, какими математическими методами пользоваться и в каком порядке. Все они близко связаны с понятием адаптивных процессов управления, к которому мы снова обратимся в главе VIII.

55. ЗАДАЧА О «ТРУДНОЙ ПЕРЕПРАВЕ»

В качестве продолжения анализа, проведенного в § 32, где рассматривалась транспортная задача Хичкока—Купманса, рассмотрим одну математическую головоломку, которая часто

встречается в математической литературе развлекательного характера.

Типичный вопрос состоит в следующем.

«Группа, состоящая из трех людоедов и трех миссионеров, пытается переправиться через реку. Имеется лодка, в которую помещается два человека и которой можно управлять с помощью любой комбинации людоедов и миссионеров из одного или двух человек. Если количество людоедов по одну сторону реки или в лодке превосходит в какой-нибудь момент число миссионеров, то людоеды предаются своим кровожадным инстинктам и пожирают миссионеров. Каким образом нужно составить план перевозки, чтобы быть уверенным, что группа людоедов и миссионеров благополучно пересечет реку?»

В следующем параграфе мы сформулируем задачу в более общем виде, а затем решим ее методом функциональных уравнений.

56. ОБЩАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда мы исходим из того, что по одну сторону реки находится m_1 людоедов и n_1 миссионеров, а по другую сторону m_2 людоедов и n_2 миссионеров. Пусть правило, предотвращающее пожирание миссионеров, заключается соответственно в выполнении ограничения $R_1(m_1, n_1) \geq 0$ на одном берегу, ограничения $R_2(m_2, n_2) \geq 0$ на другом и $R_3(m, n) \geq 0$ на лодке, вмещающей не более k человек.

Если заданы произвольные целые числа m_1, n_1, m_2, n_2 , то совсем не ясно, когда возможен план безопасной перевозки. Поэтому мы начнем с рассмотрения следующей задачи. Если исходить из заданных начальных данных, то каково максимальное число людей, которых можно перевезти с одного берега, скажем с первого берега на другой, не подвергая кого-либо из миссионеров опасности быть съеденным?

57. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Поскольку общее число людоедов и миссионеров остается в процессе перевозки постоянным, то состояние системы в любой момент определяется введенными выше числами m_1 и n_1 .

Введем функцию

$f_N(m_1, n_1)$ — максимальное число людей на втором берегу после N шагов, если мы начинаем с m_1 людоедов и n_1 миссионеров на первом берегу и соответственно с m_2 и n_2 на втором берегу. (2.149)

Предположим, что на любом шаге допустимо не возвращать ни одного человека на первый берег со второго, если все уже находятся на втором берегу.

Один шаг процесса состоит из перевозки x_1 людоедов и y_1 миссионеров с первого берега на второй, а затем из обратной перевозки x_2 людоедов и y_2 миссионеров на первый берег.

Используя принцип оптимальности, получим для $N \geq 2$ рекуррентное соотношение

$$f_N(m_1, n_1) = \max_{x, y} f_{N-1}(m_1 - x_1 + x_2, n_1 - y_1 + y_2), \quad (2.150)$$

где величины x_1, x_2, y_1, y_2 подчинены ограничениям

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} & 0 \leq x_1 \leq m_1, \quad 0 \leq y_1 \leq n_1, \\ \text{(b)} & 0 \leq x_2 \leq m_2 + x_1, \quad 0 \leq y_2 \leq n_2 + y_1, \\ \text{(c)} & x_1 + y_1 \leq k, \quad x_2 + y_2 \leq k, \\ \text{(d)} & R_3(x_1, y_1) \geq 0, \quad R_3(x_2, y_2) \geq 0, \\ \text{(e)} & R_1(m_1 - x_1, n_1 - y_1) \geq 0, \\ \text{(f)} & R_1(m_1 - x_1 + x_2, n_1 - y_1 + y_2) \geq 0, \\ \text{(g)} & R_2(m_2 + x_1, n_2 + y_1) \geq 0, \\ \text{(h)} & R_2(m_2 + x_1 - x_2, n_2 + y_1 - y_2) \geq 0. \end{array} \right\} \quad (2.151)$$

Множества x_1, x_2, y_1, y_2 , удовлетворяющие этим ограничениям, существуют, так как по предположению им удовлетворяют значения $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$.

Для $N = 1$ имеем:

$$f_1(m_1, n_1) = \max_{x, y} [(m_2 + x_1) + (n_2 + y_1)], \quad (2.152)$$

где x_1, y_1 подчинены написанным выше ограничениям.

58. ОБСУЖДЕНИЕ

Для небольших значений N и m_1, m_2, n_1, n_2 значения $f_N(m_1, n_1)$ можно легко вычислить вручную. Во многих случаях условия (2.151) столь ограничительны, что имеется един-

ственная возможная политика, которая автоматически будет оптимальной.

Указанным выше способом мы одновременно определяем минимальное число перевозок, необходимое для перемещения всех людей с одного берега на другой, всякий раз, когда это возможно. Чтобы получить это минимальное число, мы продолжаем процесс до тех пор, пока не получится значение N , для которого $f_N = m_1 + m_2 + n_1 + n_2$.

59. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Проиллюстрируем приведенный выше алгоритм на примере задачи, сформулированной в § 55.

Сначала устанавливаем, что для N -шагового процесса возможны только определенные начальные состояния. Все другие начальные состояния приводят к немедленному людоедству. Если мы обозначим через (i, j) состояние, при котором i миссионеров и j людоедов находятся на первом берегу, а $3-i$ миссионеров и $3-j$ людоедов на втором берегу, то возможны только следующие состояния: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(0, 3)$ и $(3, 3)$. Используем алгоритм, данный в § 57, для вычисления значений

$$\begin{aligned} f_1(0, 1) &= 6, & f_1(1, 1) &= 6, & f_1(3, 1) &= 2, & f_1(0, 2) &= 6, \\ f_1(2, 2) &= 3, & f_1(3, 2) &= 2, & f_1(0, 3) &= 4, & f_1(3, 3) &= 1. \end{aligned}$$

Замечая, что если $f_k(i, j) = 6$, то $f_{k+l}(i, j) = 6$ для $l = 1, 2, \dots$, мы игерируем рекуррентное соотношение для всех значений, не равных 6, и получаем:

$$\begin{aligned} f_2(3, 1) &= 3, & f_2(2, 2) &= 4, & f_2(3, 2) &= 2, & f_2(0, 3) &= 6, \\ f_2(3, 3) &= 2. \end{aligned}$$

Продолжая процесс, получим:

$$\begin{aligned} f_3(3, 1) &= 4, & f_3(2, 2) &= 6, & f_3(3, 2) &= 3, \\ f_4(3, 2) &= 4, & f_4(3, 3) &= 3, & f_5(3, 2) &= 6, \\ f_3(3, 3) &= 2, & f_4(3, 1) &= 6, \\ f_5(3, 3) &= 4, & f_4(3, 3) &= 6. \end{aligned}$$

Следовательно, требуемое число перевозок, если начинать с трех людоедов и трех миссионеров на первом берегу, равно шести. Оптимальная политика легко определится, если запоминать максимизирующее решение на каждом шаге.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

Задача максимизации или минимизации функции N переменных является одним из основных вопросов анализа, и вполне естественно, что на ее решение были направлены огромные усилия. Поскольку нас интересуют только функции весьма специального вида, мы не обращаем никакого внимания на какие-либо из существующих общих методов. Классический метод «наискорейшего спуска» описан в работе:

R. C. Rosenbloom, The method of steepest descent, Numerical Analysis, Proceedings of the Sixth Symposium in Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956.

Здесь можно найти много ссылок. Об этом методе см. также статью:

J. Todd, Motivation for working in numerical analysis, Comm. Pure Appl. Math., vol. 13, 1955, pp. 97—116.

§ 14. Строгое рассмотрение фундаментального понятия выпуклости можно найти в книгах:

T. Bonessen and W. Fenchel, Theorie der Konvexen Körper, Ergebnisse der Math., vol. 3, 1934;

H. G. Eggleston, Convexity, Cambridge Tracts., No. 47, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

С некоторыми аналитическими применениями методов этого параграфа можно познакомиться по книге:

E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities, Ergebnisse der Math., Springer, Berlin, 1961.

Мы пользуемся двойственностью евклидовой геометрии для получения дальнейшего упрощения процессов. Это свойство будет снова использовано при изучении вариационного исчисления.

§ 15. Об интерпретации множителя Лагранжа в качестве «цены» см. книгу П. Самуэльсона, упомянутую в конце главы I, а также приложение II, написанное С. Дрейфусом и М. Фреймером.

§ 16. Использование множителя Лагранжа в динамическом программировании впервые дано в статье:

R. Bellman, Dynamic programming and Lagrange multipliers, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 42, 1956, pp. 767—769.

§ 20. Приведенные здесь рассуждения заимствованы из работы:

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes, The RAND Corporation, Report R-313, 1958, pp. 49—50 [русский перевод: Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1961].

§ 21. Эти результаты имеются в работе:

S. Dreyfus, Dynamic Programming Solution of Allocation Problems, The RAND Corporation, Paper P-1083, May 9, 1957.

§ 27. Приведенные результаты были опубликованы в статье:

R. Bellman and S. Dreyfus, Dynamic programming and the reliability of multicomponent devices, Operations Research, vol. 6, 1958, pp. 200—206.

§ 32. Транспортной задаче Хичкока—Купманса посвящено огромное число работ. Первое утонченное математическое изучение задач транспортировки и задачи общего линейного программирования выполнено Л. В. Канторовичем в 1939 г. Его работа «Математические методы в организации и планировании производства», Изд. ЛГУ, 1939 (повторная публикация в сборнике «Применение математики в экономических исследованиях», Соцэкгиз, 1959) недавно переведена на английский язык.

См. также

F. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Physics, vol. 20, 1941, pp. 224—230.

R. Dorfman, P. A. Samuelson and R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, Chapter 5.

G. B. Dantzig, Application of the simplex method to a transportation problem, Activity Analysis of Production and Allocation, J. Wiley and Sons, New York, 1951, Chapter 23.

T. S. Motzkin, The assignment problem, Proc. Sixth Symposium in Applied Mathematics, vol. 6, 1953.

T. C. Koopmans and S. Reiter, A model of transportation, ibid., Chapter 14.

M. M. Flood, On the Hitchcock distribution problem, Pacific J. Math., vol. 3, 1953, pp. 369—396.

L. Ford and D. R. Fulkerson, Maximal flow through a network, Canadian J. Math., vol. 8, 1956, pp. 399—404.

T. Fukao, A computational method for dynamic linear programming, J. Operations Research Soc. Japan, vol. 2, 1960, pp. 98—113.

F. C. Toscano, An Engineering Analysis of Cargo — handling — IX, Department of Engineering, University of California at Los Angeles, 1960.

W. Szwarc, The initial solution of the transportation problem, Operations Research, vol. 8, 1960, pp. 727—729.

В перечисленных выше статьях используются методы линейного программирования или итеративные методы, построенные специально для этой конкретной задачи. Аналитические рассуждения в тексте заимствованы из статьи:

R. Bellman, Notes on the theory of dynamic programming: transportation models, Management Science, vol. 4, 1958, pp. 191—195.

В силу интереса, который представляет сама задача, а также с целью демонстрации силы метода последовательных приближений в дальнейшем были получены численные результаты.

§ 43. Систематическое изложение метода последовательных приближений дано в статье:

R. Bellman, Functional equations and successive approximations in linear and nonlinear programming, Naval Research Logist. Q., vol. 7, 1960, pp. 63—83.

О некоторых других аспектах метода последовательных приближений см. статью:

R. Kalaba, On nonlinear differential equations, the maximum operation and monotone convergence, J. Math. and Mech., vol. 8, 1959, pp. 519—573.

Здесь систематически использован метод квазилинеаризации, истоки которого лежат в работе Чаплыгина.

§ 44. Дальнейшее рассмотрение метода приближений в пространстве политик дано в книгах:

R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957 [русский перевод: Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960].

R. Bellman, Adaptive Control Processes. A Guided Tour, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961. [русский перевод: Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, М., Изд-во «Наука», 1964].

§ 46. Первоначальный вариант рис. 32, помещенный на стр. 45 книги Р. Беллмана «Динамическое программирование», неверен. Мы благодарны А. Е. Брайсону за обнаружение ошибки.

§ 48. Метод динамического программирования выгодно сочетать с градиентным методом или с методом Ньютона для решения систем нелинейных уравнений; это позволяет повысить быстроту и точность численного решения.

Успех градиентных методов, метода Ньютона и других итеративных методов обычно зависит от того, начат ли процесс доста-

точно близко от экстремума. Это можно часто обеспечить, используя метод функциональных уравнений с грубой сеткой.

В качестве альтернативы мы можем измельчать сетку по мере достаточно близкого приближения к экстремуму. Этот метод действует вполне хорошо при исследовании некоторых задач из статистической механики.

См. работу:

- R. Kikuchi and J. W. Cahn, Theory of Domain Walls in Ordered Structures—II. Pair Approximations for Nonzero Temperatures, Hughes Research Laboratories, Research Report, No. 177, 1961.

Некоторые математические постановки задач теории организации в рамках процессов принятия решений даны в работах:

- J. Marschak, Towards an economic theory of organization and information, Chap. 14 in Decision Processes, Thrall, Davis and Coombs, eds., John Wiley and Sons, New York, 1954.
J. Marschak, Elements for a theory of teams, Management Science, vol. 1, No 2, 1954, pp. 127—137.
R. Radner, The linear team: an example of linear programming under uncertainty, Proc. Second Symposium in Linear Programming, National Bureau of Standards, Washington, 1955.
R. Radner, The application of linear programming to team decision problems, Management Science, vol. 5, No 2, 1959, pp. 143—150.
C. B. McGuire, Some team models of a sales organization, Management Science, vol. 7, 1961, pp. 101—130.

Построение математических моделей обсуждается в работах:

- R. Bellman, C. Clark, C. Craft, D. Malcolm and F. M. Ricciardi, On the construction of a multistage, multi-person business game, Operations Research, vol. 5, 1957, pp. 469—503.
R. Bellman and P. Brock, On the concepts of a problem and problem-solving, Amer. Math. Monthly, vol. 67, 1960, pp. 119—134.

Анализ общей проблемы распределения ресурсов содержится в работах:

- K. J. Arrow and L. Hurwicz, Decentralization and computation in resource allocation, Essays in Economics and Econometrics, University of North Carolina Press, pp. 34—104.
H. F. Karremann, Programming the supply of a strategic material, Part I. A nonstochastic model, Naval Research Logist. Q., vol. 7, 1960, pp. 261—279.
A. Nomoto, Exploration sequentielle, Stagiaire de Cooperation Technique du Gouvernement Français de la Société d'Electronique et d'Automatisme, 1961.

§§ 55—58. Подход к задаче о «трудной переправе» был дан Б. Шварцем в работе:

B. Schwartz, An analytic method for difficult crossing puzzles, Math. Mag., vol. 34, 1961, pp. 187—193,

основанной на теории графов и топологии. Приведенные здесь результаты взяты из статьи:

R. Bellman, Dynamic programming and difficult crossing puzzles, Math. Mag., vol. 35, 1962.

Аналогичные задачи, включающие переливание различного рода жидкостей из одного типа сосудов в другой для получения смеси требуемого типа, можно рассматривать методами динамического программирования. См. задачу 38 на стр. 124 книги Р. Беллмана «Динамическое программирование».

Дополнительная литература

Идеи, высказанные в § 24, весьма близки к методике использования «объективно обусловленных оценок», предложенной в книге:

Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд-во АН СССР, 1959.

Первая математическая формулировка транспортной задачи в узком смысле была дана в работе:

А. Н. Толстой, Методы устранения нерациональных перевозок при планировании, «Социалистический транспорт», 1939, № 9.

По поводу современного состояния проблемы см. сборник «Математические методы в планировании и эксплуатации на транспорте», Труды научного совещания о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании, т. V, Изд-во АН СССР, 1961.

Метод С. А. Чаплыгина, содержащий исходные положения так называемой квазилинеаризации, изложен в учебнике:

Г. И. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 4, М.—Л., ГИТТЛ, 1952.

По поводу построения моделей распределения ресурсов см. также дополнительную литературу к главе VII.

ГЛАВА III

ОДНОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ СГЛАЖИВАНИЯ И СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

В двух предыдущих главах мы показали, что семейство стагических процессов распределения ресурсов можно рассматривать как динамические процессы и потому к ним применим метод функциональных уравнений динамического программирования. В настоящей главе, также основанной на этом подходе, мы хотим изучить некоторые процессы из области составления расписаний, которые естественным образом возникают в динамической форме.

Наряду с выработкой численного алгоритма согласно намеченному ранее плану в ряде случаев мы получим аналитическое описание оптимальной политики и аналитические представления для функции дохода. Результаты такого рода интересны не только вследствие их внутреннего изящества, но и потому, что точные решения для простых случаев могут быть использованы при приближенных решениях более сложных задач. Аналогичную ситуацию можно наблюдать в теории дифференциальных уравнений. Здесь же мы имеем гораздо большую гибкость, так как приближения могут производиться как в пространстве функций, так и в пространстве политик.

Важным моментом, который будет неоднократно подчеркиваться во всех последующих главах, является то, что метод функциональных уравнений может быть применен различными способами, как в комбинациях с классическими методами, так и в чистом виде — в зависимости от поставленной цели.

Разница между тем, что мы называем явным аналитическим решением, и тем, что мы называем численным решением, есть разница скорее форм, нежели содержания. И то и другое представляет собой алгоритм получения некоторых чисел. Во многих случаях явное решение практически бесполезно для вычисленных целей. Простейшим примером такого явления служит решение систем линейных уравнений, где решению по правилу Крамера, требующему вычисления частных двух определителей, в случае систем большого порядка предпочитают итеративный метод. Много аналогичных примеров можно найти в теории дифференциальных уравнений.

2. ПРОЦЕССЫ СГЛАЖИВАНИЯ

Рассмотрим следующую ситуацию: мы хотим, чтобы некоторая система работала в заданном режиме, причем известно, что затраты по эксплуатации системы зависят от отклонения ее от этого режима. Если мы попытаемся перевести систему в желаемое состояние, то мы затратим дополнительные средства, размер которых зависит от усилий, требуемых для этого преобразования.

Процесс, при котором целесообразно придерживаться некоторого среднего способа поведения, сочетая затраты разных типов так, чтобы максимизировать полезность всей операции, называется *процессом сглаживания*. Далее мы будем рассматривать примеры некоторых процессов этого типа из области экономики. Затем в главах VII и IX мы рассмотрим инженерные вопросы, аналогичные по математической постановке.

3. ПРИМЕР ПРОЦЕССА СГЛАЖИВАНИЯ

Начнем наше изложение с простого примера процесса сглаживания, часто встречающегося при анализе экономических, промышленных и военных операций. На некоторую станцию обслуживания согласно графику (например, ежедневно или еженедельно) поступают требования на определенные поставки или виды обслуживания. Если станция не может удовлетворить эти требования, то она терпит убыток. С другой стороны, в случае переукомплектования обслуживающим персоналом или перегрузки складов она также тер-

пит убыток другого рода. Если бы этим ограничивались условия работы станции, оптимальная политика управления была бы почти очевидной. Введем, однако, в рассмотрение затраты на изменение уровня запасов или обслуживания, что во многих ситуациях весьма естественно. Если теперь известны размеры требований, сильно меняющиеся во времени, и заданы затраты на пополнение запасов и размеры убытков обоих видов, то задача определения способа регулирования уровня запасов, минимизирующего полные издержки всего процесса, становится уже нетривиальной.

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть r_1, r_2, \dots, r_N — заданная последовательность спросов, где r_k — спрос на k -м шаге. Пусть также

$$x_k \text{ — производительность системы на } k\text{-м шаге, } k=1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где $x_0 = c$ — фиксированный начальный уровень

В настоящем примере предположим, что требуется выполнение неравенств

$$x_k \geq r_k, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Другими словами, мы настаиваем на том, чтобы спрос всегда удовлетворялся.

Введем две функции убытков

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k(x_k - r_k) &\text{— убытки на } k\text{-м шаге,} \\ &\text{вызванные тем, что } x_k > r_k; \\ \psi_k(x_k - x_{k-1}) &\text{— убытки на } k\text{-м шаге,} \\ &\text{вызванные тем, что } x_k \neq x_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Эта последняя функция измеряет убытки, связанные с изменением уровня запасов или обслуживания.

Суммарные издержки, связанные с выбором уровней x_1, x_2, \dots, x_N , выражаются формулой

$$C(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^N [\varphi_k(x_k - r_k) + \psi_k(x_k - x_{k-1})]. \quad (3.4)$$

Наша цель — выбрать уровни x_k , $k=1, 2, \dots, N$, удовлетворяющие условиям $x_k \geq r_k$, так, чтобы минимизировать эту функцию.

5. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для того, чтобы применить к этой задаче метод функциональных уравнений, рассмотрим для $R = 1, 2, \dots, N$ класс задач, требующих минимизации функции

$$C_R = \sum_{k=R}^N [\varphi_k(x_k - r_k) + \psi_k(x_k - x_{k-1})] \quad (3.5)$$

в области $x_k \geq r_k$, $k = R, R+1, \dots, N$, $x_{R-1} = c$.

Определим семейство функций

$$f_R(c) = \min_{\{x_k\}} C_R, \quad R = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

где минимум берется по всей области изменения x_k , определенной выше.

Функция

$$f_N(c) = \min_{x_N \geq r_N} [\varphi(x_N - r_N) + \psi(x_N - c)] \quad (3.7)$$

определяется несложно.

Обычным приемом получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$f_R(c) = \min_{x_R \geq r_R} [\varphi_R(x_R - r_R) + \psi_R(x_R - c) + f_{R+1}(x_R)] \quad (3.8)$$

для $R = 1, 2, \dots, N-1$. Таким образом, мы имеем простой алгоритм для получения численного решения рассмотренной задачи оптимизации.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Для различных классов функций $\{\varphi_R(x)\}$, $\{\psi_R(x)\}$ и ограничений того или иного типа оптимальные политики могут быть найдены в явном виде. Ссылки на ряд полученных в этом направлении результатов читатель найдет в библиографии в конце этой главы.

7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Рассмотренный процесс, так же как и процесс загрузки судна (см. § 22 главы I), является одномерным процессом с целочисленными ограничениями. Более того, экстремумы

здесь легко найти при помощи прямого сравнения, и при целочисленных точках решетки не требуется никакой интерполяции. Область изменения величины c ограничивается автоматически и известна заранее.

В результате мы имеем короткую и прямую программу с фиксированной запятой, не вызывающую практически никаких трудностей в отношении объема памяти и затрат времени. Фактически во всех примерах этого процесса, которые до сих пор ставились на машину, время вычисления определялось временем выдачи результатов на печать.

В большинстве задач динамического программирования природа рассматриваемых величин такова, что аргумент функции в правой части может принимать значения из широкой области. Например, в процессе загрузки судна (§ 22 главы I) количество единиц типа N , которые следует погрузить на корабль вместимости w , может принимать любое значение между 0 и $\lfloor w/w_N \rfloor$. Оставшаяся вместимость $w - w_N x_N$ таким образом, может принимать любые значения между 0 и w . В результате, прежде чем мы начнем вычисление $f_N(z)$, мы должны вычислить функцию $f_{N-1}(z)$ во всех целых точках z между 0 и w .

Однако в рассматриваемом процессе мы можем заранее точно определить, какие значения функции $f_{R+1}(x_R)$ понадобятся для определения $f_R(c)$. Принимая во внимание этот факт, мы экономим много машинного времени.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что значение x_R ограничено снизу требованием r_R и сверху величиной $\max_R r_R$, так как нет смысла выбирать x_R большим, чем максимальное требование. Следовательно, функция $f_{R+1}(x_R)$ должна быть определена для значений x_R в промежутке $r_R \leq x_R \leq \max_R r_R$.

Отсюда получаем, что, когда $f_{R+1}(c)$ вычисляется с помощью соотношения

$$f_{R+1}(c) = \min_{x_{R+1}} [\varphi_R(x_R - r_R) + \varphi_R(x_R - c) + f_{R+2}(x_{R+1})], \quad (3.9)$$

мы можем рассматривать только значения, удовлетворяющие условиям

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & r_R \leq c \leq \max_R r_R, \\ (b) \quad & r_{R+1} \leq x_{R+1} \leq \max_R r_R \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Хотя для того, чтобы понизить размерность задачи максимизации, мы сводим ее к многошаговому процессу, но для уменьшения вычислительных трудностей мы в то же время используем наши знания о будущих требованиях.

8. РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе получения численных результатов мы использовали три различных критерия. В одном случае функция издержек вследствие перегрузки $\varphi_R(x_R - r_R)$ принималась равной $x_R - r_R$. Во втором случае мы полагали:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R(x_R - r_R) &= x_R - r_R & \text{для } 0 \leq x_R - r_R \leq M, \\ \varphi_R(x_R - r_R) &= M & \text{для } x_R - r_R > M. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

В третьем случае предполагалось значительное увеличение убытков, когда перегрузка превосходит величину M :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R(x_R - r_R) &= x_R - r_R, & 0 \leq x_R - r_R \leq M, \\ \varphi_R(x_R - r_R) &= x_R - r_R + \frac{1}{2}(x_R - r_R - M)^2, & x_R - r_R \geq M. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Затраты на увеличение производительности мы полагаем пропорциональными этому увеличению

$$\psi(x_R - x_{R-1}) = a \max(x_R - x_{R-1}, 0), \quad (3.13)$$

а затраты на уменьшение производительности — равными 0. Во всех трех случаях затраты принимались не зависящими от номера шага.

Для каждого из трех возможных критериев мы рассмотрим следующий график поступления требований, включающий 27 периодов:

$$\begin{aligned} &18, 13, 9, 6, 3, 5, 8, 3, 1, \\ &9, 18, 11, 4, 3, 2, 4, 5, 9, \\ &12, 13, 12, 11, 13, 7, 1, 8, 14. \end{aligned} \quad (3.14)$$

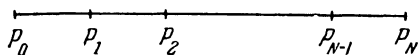
Здесь $a=2$ или 4 и $M=2$ или 4 и исходный уровень равен 0. Следует заметить, что в большинстве случаев оптимальная политика не единственна. Политика, показанная на графиках жирной линией, есть результат произвольного выбора на каждом шаге одного из двух минимизирующих значений.

9. БЛОК-СХЕМА (см. рис. 34)

10. НЕСКОЛЬКО ГРАФИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ (рис. 35—45)

11. ЗАДАЧИ О БЛИЖАЙШЕМ СОСЕДЕ

Рассмотрим набор точек p_i , лежащих на одной прямой и предположим, что только между соседними точками существует некоторое взаимодействие. Пусть положение точки p_i



определяется координатой x_i . Мы считаем, что совокупное взаимодействие между точками задается функцией

$$g_1(x_1 - x_0) + g_2(x_2 - x_1) + \dots + g_N(x_N - x_{N-1}). \quad (3.15)$$

Если значения x_0 и x_N фиксированы, то состояние системы описывается числами x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . Требуется найти такой набор этих величин, при котором функция (3.15) минимальна. Численное решение задачи о нахождении x_1, x_2, \dots, x_{N-1} легко получить с помощью изложенного выше метода.

Задачи такого типа часто встречаются в статистической механике. В конце главы имеются ссылки на работы, в

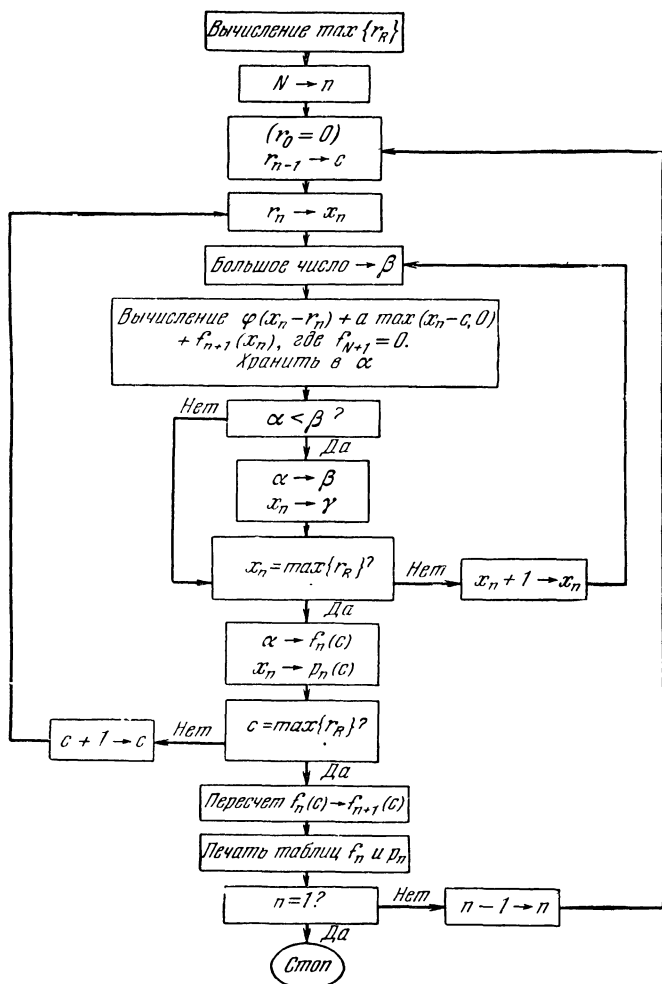


Рис. 34. Блок-схема решения.

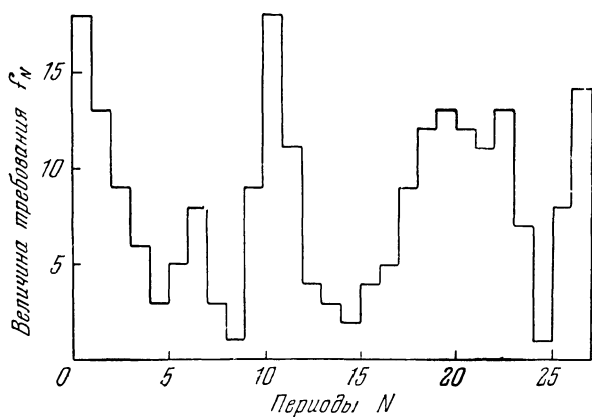
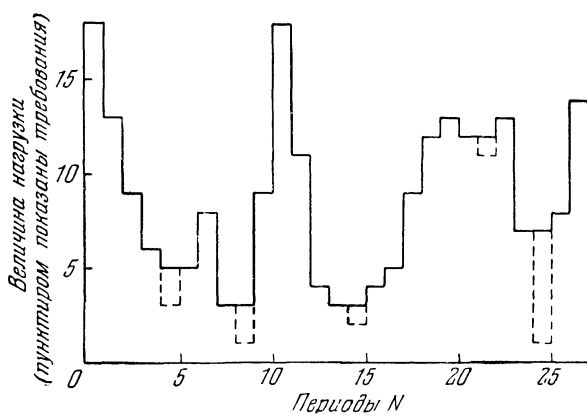
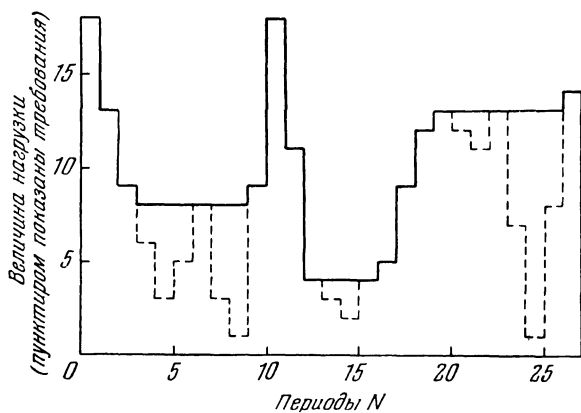


Рис. 35. График требований.

Рис. 36. Оптимальная нагрузка согласно критерию 1, $a=2$, издержки = 120.



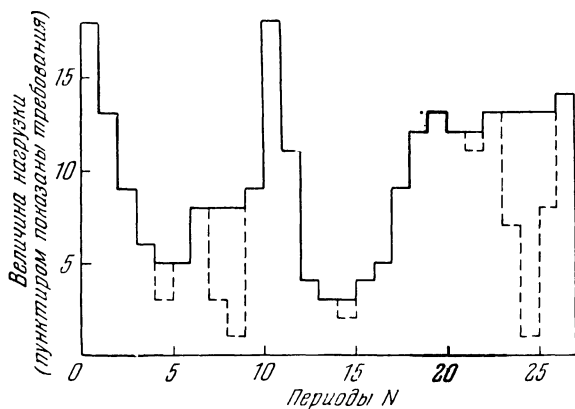


Рис. 39. Оптимальная нагрузка согласно критерию 2, $a=2$, $M=4$, издержки = 110.

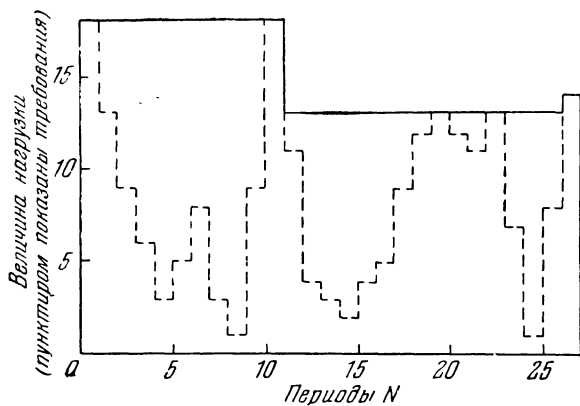


Рис. 40. Оптимальная нагрузка согласно критерию 2, $a=4$, $M=2$, издержки = 118.

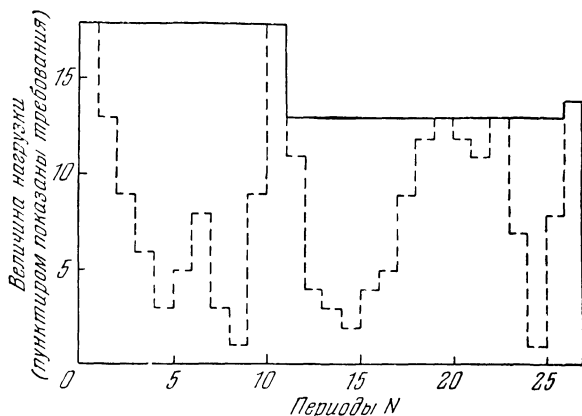


Рис. 41. Оптимальная нагрузка согласно критерию 2,
 $a=4$, $M=4$, издержки = 154.

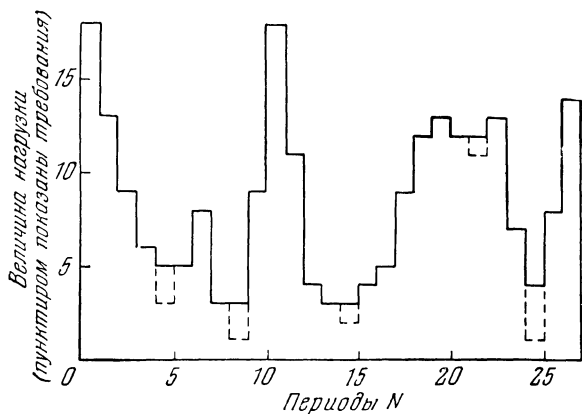


Рис. 42. Оптимальная нагрузка согласно критерию 3,
 $a=2$, $M=2$, издержки = 123,5.

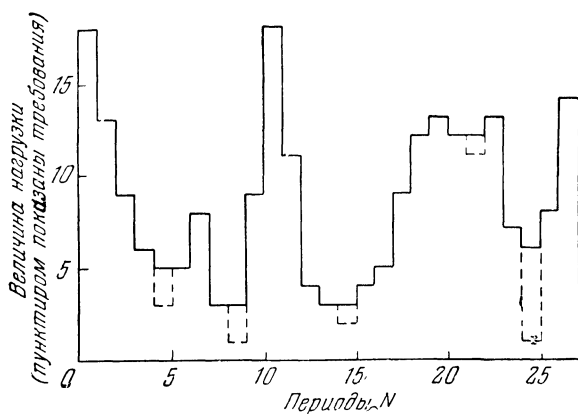


Рис. 43. Оптимальная нагрузка согласно критерию 3, $a=2$, $M=4$, издержки = 121,5.

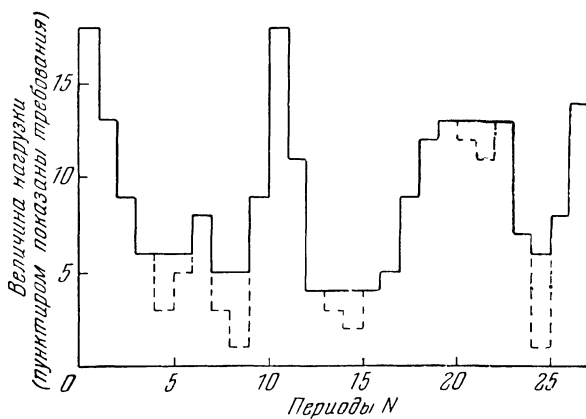


Рис. 44. Оптимальная нагрузка согласно критерию 3, $a=4$, $M=2$, издержки = 228.

которых эта задача решается как классическими методами, так и методами динамического программирования.

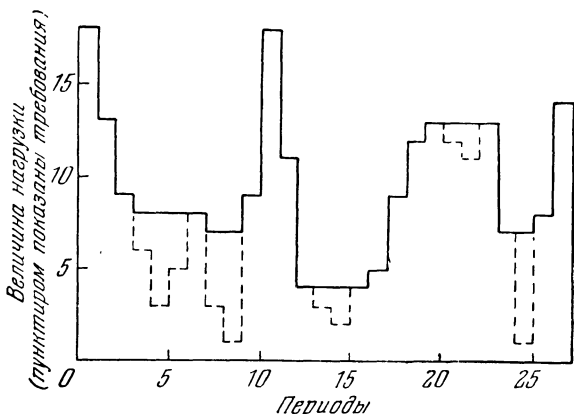


Рис. 45. Оптимальная нагрузка согласно критерию 3, $a=4$, $M=4$, издержки = 216,5.

12. ЗАМЕНА ОБОРУДОВАНИЯ

Одной из основных проблем индустрии является проблема замены старого парка машин новым, устаревших орудий — современными устройствами. Оборудование со временем изнашивается как в буквальном смысле слова, так и «морально», т. е. устаревает по сравнению с более современным модернизированным оборудованием, и наступает момент, когда большие затраты на новое оборудование, убытки вследствие остановки производства и расходы на создание новых кадров — все это компенсируется увеличением производительности и уменьшением производственных затрат.

Мы хотим определить оптимальную политику модернизации и замены оборудования при различных предположениях относительно текущих издержек, производственных характеристик и будущего развития техники. Так как решения должны приниматься почти ежегодно в зависимости от характерного для данного процесса периода времени, мы, очевидно, имеем многошаговый процесс решения.

Во всех исследованиях такого рода мы вынуждены делать предположения относительно будущего. Здесь мы рассмотрим только довольно простой случай, когда мы располагаем предсказанием относительно будущего. Как делать такие предсказания и как следует их изменять на основании опыта — еще более сложные задачи (также относящиеся к динамическому программированию), которых мы в книге не будем касаться.

13. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

В целях упрощения рассуждений этого вводного параграфа предположим, что у нас имеется только одна машина, которая приносит ежегодно некоторый доход, требует определенного ухода и может быть в любой момент продана и заменена новой машиной. Предположим, что доход, затраты на содержание, стоимость замены машины известным образом зависят от срока ее службы.

При этих данных (рис. 46, 47, 48) мы хотим определить оптимальную политику замен в отношении этой машины.

14. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предположим, что решения принимаются только в моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$ и что в каждый такой момент мы должны решить, сохранить ли старую машину (это решение будем обозначать буквой K) или купить новую (это решение обозначим через P). Пусть $f(t)$ — суммарный доход при оптимальной политике за весь рассматриваемый период от использования машины, имевшей к началу процесса возраст t . Для того чтобы суммарный доход оставался конечным, введем коэффициент скидки, т. е. предположим, что одна единица дохода на некотором шаге равносильна a единицам дохода следующего шага. Это — известный прием математической экономики. Тогда, действуя обычным образом, мы получим функциональное уравнение

$$f(t) = \max \begin{bmatrix} P: r(0) - u(0) - c(t) + af(1) \\ K: r(t) - u(t) + af(t+1) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Это — первый рассматриваемый нами бесконечный процесс и вместе с тем первый процесс, в котором обозначению f

В § 13 мы предположили, что доход, затраты на содержание и замену являются функциями только срока службы машины. Данные экспериментов показывают, что эту зависимость можно считать экспоненциальной (см. рис. 46, 47, 48), т. е. $r(t) = Pe^{-st}$, $u(t) = A + B(1 - e^{-\omega t})$, $c(t) = C(1 - ke^{-dt})$. (3.20)

Здесь P — доход от новой машины, A — затраты на содержание новой машины, $A + B$ — предельные затраты на содержание машины по мере ее старения, C — стоимость замены бесконечно устаревшей машины новой, k — доля C , остающаяся в качестве продажной цены машины сразу после покупки, и показатели s , ω и d определяют скорость стремления к пределу соответствующих величин.

Предположим теперь, что производятся технологические усовершенствования. В результате машина, произведенная в течение каждого следующего года N , будет давать начальный доход, превосходящий P , и в далеком будущем у абсолютно новых машин начальный доход будет равен $P + Q$. Предположим, что улучшение начальных характеристик носит также экспоненциальный характер уже как функция от времени изготовления машины, а не срока службы. Так как год производства определяется значением N , то мы можем написать:

$$r_N(t) = [P + Q(1 - e^{-g(N-t)})]e^{-st}. \quad (3.21)$$

Если издержки производства стремятся к нулю по мере улучшения технологии и если увеличение затрат на содержание по мере старения машины уменьшается в u раз ежегодно, то можно записать:

$$u_N(t) = Ae^{-z(N-1)} + B(1 - e^{-\omega t})u^{N-t}. \quad (3.22)$$

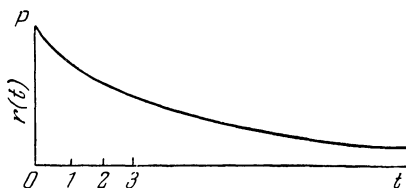


Рис. 46. $r(t)$ — годовой доход от машины возраста t .

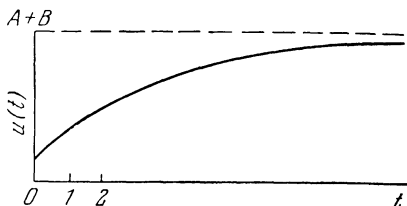


Рис. 47. $u(t)$ — годовые расходы на содержание машины возраста t .

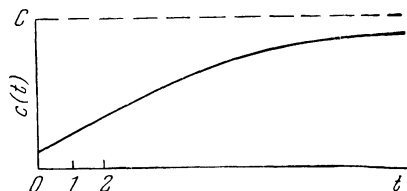


Рис. 48. $C(t)$ — стоимость замены машины возраста t .

Стоимость этих новых улучшенных машин может со временем увеличиваться или уменьшаться; но, не ограничивая общности, можно также предполагать ее постоянной.

Итак, мы определили семейство кривых. Для машин, произведенных в некоторый год, мы имеем кривую поведения в зависимости от возраста машин. На рис. 49 показано типичное семейство таких кривых, изображающих затраты на

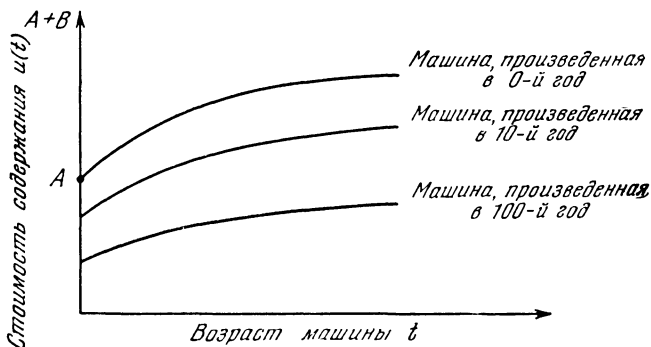


Рис. 49.

содержание машины. Хотя предположение об экспоненциальном характере технологических изменений облегчает ответы на некоторые вопросы и весьма реалистично, в следующем параграфе мы приведем численное решение, не зависящее от конкретного вида этой зависимости. На практике готовые таблицы различных затрат не менее удобны в употреблении, чем аналитические зависимости, и в то же время они больше соответствуют действительности. В большинстве данных ранее решений этой задачи экспоненциальные зависимости были введены для облегчения аналитического решения.

17. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Введем следующие функции:

$f_N(t)$ — величина суммарного дохода за год N от машины возраста t *) при оптимальной политике замены в оставшийся период **).

(3.23)

*) И за период после года N . (Прим. ред.)

**) Включая год N . (Прим. ред.)

Будущие доходы, как и выше, учитываются со скидкой a . Однако мы также предполагаем, что процесс длится N_0 шагов и затем останавливается. Следовательно,

$$f_{N_0+1}(t) \equiv 0.$$

Так как суммарный доход, связанный с приобретением новой машины в год N , равен

$$f_N^{(p)}(t) = r_N(0) - u_N(0) - c_N(t) + af_{N+1}(1), \quad (3.24)$$

а доход при сохранении старой машины равен

$$f_N^{(k)}(t) = r_N(t) - u_N(t) + af_{N+1}(t+1), \quad (3.25)$$

то мы получаем уравнение

$$f_N(t) = \max [f_N^{(p)}(t), f_N^{(k)}(t)] \quad (3.26)$$

или

$$f_N(t) = \max \left[P: r_N(0) - u_N(0) - c_N(t) + af_{N+1}(1) \right. \\ \left. K: r_N(t) - u_N(t) + af_{N+1}(t+1) \right]. \quad (3.27)$$

Функция $f_N(t)$ полагается равной 0 для $N \geq N_0 + 1$.

Когда в уравнении (3.27) N принимает значение N_0 , мы получаем выражение для $f_{N_0}(t)$ через известные функции. Следовательно, можно найти $f_{N_0}(t)$ для всех допустимых значений t . В зависимости от наших пока неопределенных решений на предшествующих шагах мы могли бы прийти к последнему шагу с чем угодно — от машины, купленной в предыдущий период и прослужившей один год, до очень старой машины, с которой начинался процесс. Построив функцию $f_{N_0}(t)$, мы можем использовать уравнение (3.27) для определения функции $f_{N_0-1}(t)$. Продолжая эту процедуру, получим функцию $f_1(t)$, оптимальный доход процесса, начавшегося в 1-й год. Выписывая политику, использованную при максимизации (3.27), мы получим политику замены, которая обеспечивает максимальную прибыль.

18. ПРИМЕР

Решим следующий простой пример. Рассмотрим процесс, длящийся 10 лет. Пусть затраты на замену машины, доход, затраты на содержание машин, произведенных в течение каждого из этих 10 лет в зависимости от возраста машин, равны:

Машина, произведенная в 1-й год

Возраст машины	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Доход	90	85	80	75	70	70	70	60	60	60
Затраты на содержание . . .	20	20	25	25	30	30	35	40	45	50
Затраты на замену	200	220	240	250	255	260	265	270	270	270

Машина, произведенная во 2-й год

Возраст машины . .	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Доход	100	90	80	75	70	65	65	65	65
Затраты на содержание	15	20	20	25	25	30	30	35	35
Затраты на замену	200	220	240	250	255	260	265	270	270

Машина, произведенная в 3-й год

Возраст машины	0	1	2	3	4	5	6	7
Доход	110	105	100	95	90	80	70	60
Затраты на содержание	15	15	20	20	25	25	30	30
Затраты на замену	200	220	240	250	255	260	265	270

Машина, произведенная в 4-й год

Возраст машины	0	1	2	3	4	5	6
Доход	115	110	100	90	80	70	60
Затраты на содержание	15	15	20	20	25	25	30
Затраты на замену	210	215	220	225	230	235	240

Машина, произведенная в 5-й год

Возраст машины	0	1	2	3	4	5
Доход	120	115	115	110	105	100
Затраты на содержание	10	10	15	15	20	20
Затраты на замену	210	215	220	225	230	235

Машина, произведенная в 6-й год

Возраст машины	0	1	2	3	4
Доход	125	120	110	105	110
Затраты на содержание	10	10	10	15	15
Затраты на замену	210	220	230	240	250

Машина, произведенная в 7-й год

Возраст машины	0	1	2	3
Доход	135	125	110	105
Затраты на содержание . .	10	10	10	10
Затраты на замену	210	220	230	240

Машина, произведенная в 8-й год

Возраст машины	0	1	2
Доход	140	135	125
Затраты на содержание . .	5	10	10
Затраты на замену	220	230	240

Машина, произведенная в 9-й год

Возраст машины	0	1
Доход	150	140
Затраты на содержание . . .	5	10
Затраты на замену	220	225

Машина, произведенная в 10-й год

Возраст машины	0
Доход	155
Затраты на содержание . . .	5
Затраты на замену	220

Кроме того, мы начинаем процесс, имея машину, называемую исходной машиной, прослужившую, скажем, уже три года, со следующими характеристиками:

Возраст	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Доход	60	60	50	50	50	40	40	40	30	30
Затраты на содержание . . .	55	55	55	60	60	60	60	65	65	70
Затраты на замену	250	260	270	280	280	290	290	300	300	310

Построим таблицу для $f_{10}(t)$. Чтобы вычислить $f_{10}(1)$, сравним разницу между доходом и затратами на содержание старой машины (машины, произведенной в 9-й год и прослужившей один год) с затратами на ее замену*). Получим:

$$f_{10}(1) = \max \left[\begin{array}{l} P: 155 - 5 - 225 \\ K: 140 - 10 \end{array} \right] = 130, \quad (3.28)$$

*) Точнее, затратами на замену старой машины с учетом дохода и расхода на содержание новой машины. (Прим. ред.)

и мы должны сохранить старую машину. Вряд ли можно ожидать, что оптимальной окажется политика, предписывающая покупку новой машины на последнем шаге процесса. Аналогично

$$f_{10}(2) = \max \left[\begin{array}{l} P: 155 - 5 - 240 \\ K: 125 - 10 \end{array} \right] = 115. \quad (3.29)$$

Заполним теперь всю таблицу значений функции $f_{10}(t)$ (см. таблицу 3.1).

Т а б л и ц а 3.1

t	$f_{10}(t)$	Политика	t	$f_{10}(t)$	Политика
1	130	K	6	30	K
2	115	K	7	30	K
3	95	K	8	30	K
4	85	K	9	10	K
5	80	K	12	40	K

Вычислим первые два значения $f_9(t)$ и составим полную таблицу, определяющую политику. Для удобства вычислений положим $a=1$, хотя в действительности a следует взять достаточно малым, чтобы отразить как неопределенность наших сведений относительно будущего, так и обесценивание доллара.

$$\left. \begin{aligned} f_9(1) &= \max \left[\begin{array}{l} P: 150 - 5 - 230 + 130 \\ K: 135 - 10 + 115 \end{array} \right] = 240, \\ f_9(2) &= \max \left[\begin{array}{l} P: 150 - 5 - 230 + 130 \\ K: 110 - 10 + 95 \end{array} \right] = 195. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

Таким же образом, используя уравнение (3.27), имеем таблицу 3.2 доходов для нашей гипотетической машины. Проследим, как получается последнее число $f_1(3)=310$, ибо оно и означает суммарный доход, которого можно добиться при оптимальной политике. Мы начинаем в первый год, имея исходную машину, которую можно заменить или сохранить. Если мы заменим исходную машину, затратив 250 долларов, то новая машина (произведенная в первый год) даст 70 долларов чистого дохода за первый год службы плюс будущий доход (490 долларов), как машина, прослужившая один год

Таблица 3.2

t	$f_9(t)$	Политика	t	$f_8(t)$	Политика	t	$f_7(t)$	Политика
1	240	K	1	310	K	1	385	K
2	195	K	2	275	K	2	360	K
3	175	K	3	260	K	3	215	K
4	165	K	4	145	P	4	190	K
5	75	K	5	125	K	5	175	P
6	70	K	6	110	P	6	170	P
7	60	K	7	105	P	9	145	P
8	25	K	10	75	P			
11	25	P						

t	$f_6(t)$	Политика	t	$f_5(t)$	Политика	t	$f_4(t)$	Политика
1	465	K	1	390	K	1	435	K
2	295	K	2	345	K	2	385	K
3	265	K	3	325	P	3	370	K
4	245	P	4	320	P	6	285	K
5	240	P	7	295	P			
8	210	P						

t	$f_3(t)$	Политика	t	$f_2(t)$	Политика	t	$f_1(t)$	Политика
1	440	K	1	490	K	3	310	P
2	425	K	4	285	K			
5	280	K						

и начинающая второй год работы. Поэтому чистый выигрыш равен 310 долларам. Если мы сохраним исходную машину, мы получим в этот год на 5 долларов больше и, получив за все будущие годы 285 долларов, будем иметь общий доход в 290 долларов. Так как $310 > 290$, мы решаем купить новую машину. Если мы выбрали такую политику, то, очевидно, второй год мы начнем, имея машину, прослужившую один год, и, как видно из таблицы, ее надо сохранить.

Третий год мы начнем, имея машину, проработавшую два года, и, следуя таблице, мы снова сохраняем ее. Возвращаясь теперь к исходному моменту, мы видим, что оптимальная политика состоит в покупке новой машины в первый год, сохранении ее в течение пяти лет с последующей заменой ее на новую, которую следует сохранять уже до конца процесса.

Для проверки наших выводов мы можем привести доходы от этой политики, сведенные в таблицу 3.3.

Т а б л и ц а 3.3

Год	Политика	Доход	Год	Политика	Доход
1	<i>P</i>	— 180	6	<i>K</i>	105
2	<i>K</i>	65	7	<i>K</i>	100
3	<i>K</i>	55	8	<i>K</i>	95
4	<i>K</i>	50	9	<i>K</i>	85
5	<i>P</i>	— 145	10	<i>K</i>	80
					310

В качестве побочного результата нашего анализа мы получаем, что если бы нам пришлось сохранить исходную машину в течение первого года, например, из-за отсутствия достаточного капитала для замены, то оптимальная политика состояла бы в сохранении старой машины в течение пяти лет. Эта политика как раз и дает прибыль в 290 долларов. Так как чистый выигрыш от замены старой машины на новую составляет 20 долларов, владелец машины должен решать, будет ли экономически выгодным вкладывать 250 долларов ради выигрыша 20 долларов. Вычисления такого рода по сравнению всех вариантов и выбору наилучшего графика замены легко можно сделать вручную за час с небольшим. Вдобавок эти вычисления снабдят нас некоторой дополнительной ценной информацией. При машинном счете на один этап понадобится несколько секунд.

19. ДРУГИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Описанный здесь метод решения является достаточно общим и допускает большое разнообразие постановок задачи о замене оборудования. Для создания математической модели

нет надобности делать какие-нибудь нереальные предположения. Например, если желательно определить функцию $g_N(t, x)$, определяющую стоимость замены машины возраста t машиной возраста x в N -й год, то в рассмотрение может быть включена третья возможность — покупка использованной машины. Рекуррентное соотношение в этом случае имеет вид

$$f_N(t) = \left[\begin{array}{l} \text{Покупка новой машины} \\ r_N(0) - u_N(0) - c_N(t) + af_{N+1} \\ \text{Покупка машины возраста } x \\ \max_x r_N(x) - u_N(x) - g_N(t, x) + af_{N+1}(x + 1) \\ \text{Сохранение старой машины} \\ r_N(t) - u_N(t) + af_{N+1}(t + 1) \end{array} \right]. \quad (3.31)$$

Если мы допускаем для x значение 0 и $c_N(t) = g_N(t, 0)$, то покупку новой машины можно считать частным случаем покупки машины возраста x . Мы можем включить в рассмотрение также возможность капитального ремонта, если предположим, что машина возраста t , прошедшая капитальный ремонт, имеет характеристики машины возраста t' , $t' < t$. Здесь t есть функция срока службы t , а также усилий, затрачиваемых на ремонт.

Для того чтобы возможность ремонта включить в рассмотрение самым общим образом, увеличим размерность задачи. Введем функцию

$$f_N(t_1, t_2) \text{ — величина суммарного дохода на год } N \text{ от машины возраста } t_1, \text{ прошедшей последний капитальный ремонт после } t_2 \text{ лет службы при оптимальной политике в оставшейся части процесса *)}. \quad (3.32)$$

Теперь мы должны определить все наши издержки в зависимости как от возраста машины t_1 , так и времени

*) Точнее, функция $f_N(t_1, t_2)$ есть величина суммарного дохода за период, начинающийся с года N , при наличии в начале этого года машины возраста t_1 , прошедшей последний капитальный ремонт после t_2 лет службы, при оптимальной политике за весь указанный период. (Прим. ред.)

последнего капитального ремонта. Сделав это, мы сможем написать с помощью аналогичного метода рекуррентное соотношение

$$f_N(t_1, t_2) = \max \left[\begin{array}{l} P: r_N(0, 0) - u_N(0, 0) - c_N(t_1, t_2) + \\ \quad + af_{N+1}(1, 0) \\ K: r_N(t_1, t_2) - u_N(t_1, t_2) + \\ \quad + af_{N+1}(t_1 + 1, t_2) \\ O: r_N(t_1, t_1) - u_N(t_1, t_1) - \\ \quad - O_N(t_1, t_2) + af(t_1 + 1, t_1) \end{array} \right], \quad (3.33)$$

где $O_N(t_1, t_2)$ — затраты на капитальный ремонт в год N машины возраста t_1 , прошедшей последний капитальный ремонт в возрасте t_2 . Метод численного решения этой задачи аналогичен методу, изложенному в § 17, за исключением того, что теперь мы вычисляем последовательность функций двух переменных. Такие вычисления для значений t_1 и t_2 , допустимых в данной задаче, легко проводятся на вычислительной машине вне какой бы то ни было зависимости от длины анализируемого процесса.

Можно было бы сформулировать эту задачу в рамках стохастической модели, когда максимизируется ожидаемый доход. В такой модели следует ввести вероятность аварии как функцию возраста машины, характера ее использования и подобного рода других факторов. Задача состоит в отыскании политики замены, максимизирующей некоторый критерий предпочтения.

Задачи такого типа являются частными случаями марковских процессов решения, рассматриваемых в главе IX. Мы увидим, что если с помощью метода функциональных уравнений установлено существование некоторых устойчивых или асимптотически устойчивых политик, то мы можем отказаться от функциональных уравнений и использовать другие методы для получения приближенных решений. Таким способом часто можно обойти обычные трудности, связанные с многомерностью.

Ниже мы рассмотрим процесс управления запасами, который является интересной комбинацией процессов сглаживания и замены оборудования.

20. ЗАДАЧА СКЛАДИРОВАНИЯ

Продолжая рассмотрение одномерных процессов составления расписаний, обратимся к следующей задаче.

«Пусть имеется склад фиксированной вместимости с некоторым начальным запасом товара, стоимость которого подвержена известным сезонным изменениям. Какова оптимальная политика покупки (или производства), хранения и продажи этого товара?»

Метод динамического программирования дает возможность не только создания простого вычислительного алгоритма, но и нахождения точного аналитического решения задачи с помощью основных функциональных уравнений.

21. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Начнем с введения следующих величин:

$$\begin{aligned} B &— \text{вместимость хранилищ склада,} \\ v &— \text{величина наличного запаса на каждом шаге.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Рассмотрим сезонный товар, который мы должны закупить (или произвести), а затем продать в течение N периодов. Введем следующие обозначения (индекс i указывает, что до конца остается i периодов):

$$\begin{aligned} c_i &— \text{затраты на единицу товара (покупаемого или} \\ &\quad \text{производимого),} \\ p_i &— \text{продажная цена единицы товара,} \\ x_i &— \text{количество произведенного или купленного} \\ &\quad \text{товара,} \\ u_i &— \text{количество проданного товара.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

На всякую возможную политику мы должны наложить следующие ограничения:

- (а) *Ограничение на покупку.* Запас в конце i -го периода не может превышать вместимости склада.
 - (б) *Ограничение на продажу.* Количество товара, проданного в i -й период, не может превышать количества товара, имеющегося на складе в конце $(i-1)$ -го периода.
 - (в) *Неотрицательность.* Объем товара, купленного или проданного в любой период, неотрицателен.
- (3.36)

Следствием этих ограничений являются неравенства *):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ограничения на покупку} \\ v + \sum_{j=1}^i (x_j - y_j) \leq B, \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ \text{Ограничения на продажу} \\ y_i \leq v + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j), \quad i = 2, 3, \dots, N, \\ y_1 \leq v. \\ \text{Неотрицательность} \\ x_i, y_i \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.37)$$

Придерживаясь этих ограничений, мы хотим максимизировать суммарную прибыль, полученную при N -шаговом процессе, т. е. функцию

$$P_N = \sum_{j=1}^N (p_j y_j - c_j x_j). \quad (3.38)$$

22. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Чтобы рассматривать эту задачу методами динамического программирования, введем последовательность функций $\{f_N(v)\}$, определяемых соотношением

$$f_N(v) = \max_{(y, x)} P_N \quad (3.39)$$

для значений $v \geq 0$, $N = 1, 2, \dots$, где x_i и y_i удовлетворяют соотношениям (3.37).

Для $N = 1$, очевидно, имеем:

$$f_1(v) = \max (p_1 y_1 - c_1 x_1), \quad (3.40)$$

где максимум берется по области

$$0 \leq y_i \leq v, \quad x_1 \geq 0. \quad (3.41)$$

Следовательно,

$$f_1(v) = p_1 v. \quad (3.42)$$

*) В неравенствах (3.37), и только в них, авторы используют отсчет времени в прямом направлении, и индекс i означает число прошедших периодов от начала. Далее и до конца в рассмотренной задаче применен обратный отсчет. (Прим. ред.).

Для $N \geq 2$ обычным образом получаем рекуррентное соотношение

$$f_N(v) = \max_{x_N, y_N} [p_N y_N - c_N x_N + f_{N-1}(v + x_N - y_N)], \quad (3.43)$$

где максимум берется по области

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 0 \leq y_N \leq v, \\ (b) \quad & x_N \geq 0, \\ (c) \quad & v + x_N - y_N \leq B. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

23. ОБСУЖДЕНИЕ

Это рекуррентное соотношение является весьма простым и объем вычислений, позволяющих найти максимальную прибыль и оптимальную политику, лишь несколько превышает возможности ручного счета. Оказывается, однако, что из рекуррентных соотношений можно получить гораздо больше. Мы можем получить простое точное решение, которое требует только ручного счета.

24. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Далее оказывается удобным рассуждать в терминах уровня запасов, достигаемого к концу каждого периода. Введем величину

$$v + x_N - y_N = u. \quad (3.45)$$

Теперь максимизацию по области (3.44) можно записать в виде

$$\max_{0 \leq u \leq B} \left[\max_{0 \leq y_N \leq v, x_N \geq 0} \right]. \quad (3.46)$$

Тогда соотношение (3.43) будет выглядеть так:

$$f_N(v) = \max_{0 \leq u \leq B} [\varphi_N(u, v) + f_{N-1}(u)], \quad (3.47)$$

где

$$\varphi_N(u, v) = \max_{x_N, y_N} (p_N y_N - c_N x_N) \quad (3.48)$$

и x_N, y_N удовлетворяют неравенствам

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad v + x_N - y_N = u, \\ (b) \quad y_N \leq v, \\ (c) \quad x_N, y_N \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

Для определения функции $\varphi_N(u, v)$ мы должны максимизировать линейную функцию по точкам, лежащим на некоторой прямой; это означает, что мы должны исследовать только граничные точки.

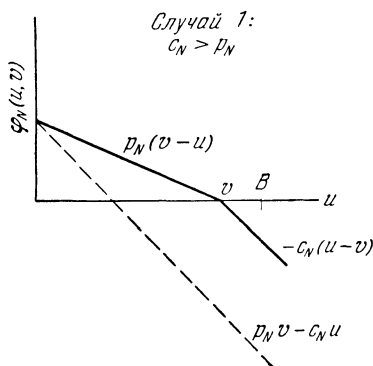


Рис. 50.

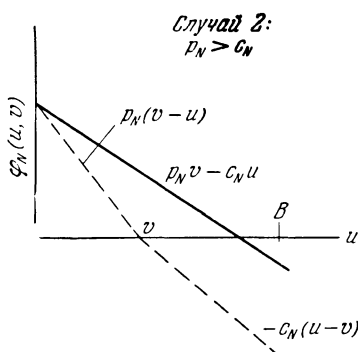


Рис. 51.

Когда $0 \leq u \leq v$, этими точками являются $x_N = 0$, $y_N = v - u$ и $x_N = u$, $y_N = v$. В этой области

$$\varphi_N(u, v) = \max [p_N(v - u), p_N v - c_N u]. \quad (3.50)$$

Аналогично для $v \leq u \leq B$

$$\varphi_N(u, v) = \max [-c_N(u - v), p_N v - c_N u]. \quad (3.51)$$

При фиксированном v , $0 \leq v \leq B$, в двух случаях, изображенных на рис. 50, 51, результат можно интерпретировать геометрически.

Установив природу функций $\varphi(u, v)$, попытаемся выяснить аналитическую структуру последовательности $\{f_N(v)\}$.

25. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Структура функций $f_N(v)$, определяемых (3.45), не совсем проста. Однако имеет место следующий неожиданный результат:

Теорема. Функция $f_N(v)$ линейна по v , причем ее коэффициенты являются функциями p_1, \dots, p_N и c_1, \dots, c_N , именно

$$f_N(v) = K_N(p_1, p_2, \dots, p_N; c_1, c_2, \dots, c_N) + \\ + L(p_1, p_2, \dots, p_N; c_1, c_2, \dots, c_N)v. \quad (3.52)$$

Кроме того, оптимальная политика u не зависит от начального уровня v , а зависит только от продажных и закупочных цен.

26. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Проведем доказательство по индукции. Очевидно, что $f_1(v) = p_1 v$, так как доход на нулевом шаге $f_0(u)$ тождественно равен нулю. Допустим, что $f_{N-1}(v) = K_{N-1} + L_{N-1}v$, где коэффициенты K_{N-1} и L_{N-1} определяются $N-1$ парой $\{p_i, c_i\}$ продажных и закупочных цен, $i=1, 2, \dots, N-1$. Покажем, что $f_N(v)$ имеет тот же вид, причем коэффициенты K_N и L_N зависят уже от последовательности $\{p_i, c_i\}$, $i=1, 2, \dots, N$. Как и в случае 1, пусть $c_N > p_N$. Согласно предположению о линейности $f_{N-1}(u)$, максимум $f_{N-1}(u)$ должен достигаться в одной из трех точек $u=0$, $u=v$ или $u=B^*$).

*) В силу (3.50), (3.51)

$$\varphi_N(u, v) = \begin{cases} p_N v - u \max(p_N, c_N), & 0 \leq u \leq v, \\ -c_N u + v \max(p_N, c_N), & v \leq u \leq B \end{cases}$$

и является кусочно-линейной по u при $c_N > p_N$. Максимум суммы $\varphi_N(u, v) + f_{N-1}(u)$ поэтому может достигаться в одной из трех точек: $u=0$, $u=v$, $u=B$. При $p_N > c_N$

$$\varphi_N(u, v) = p_N v - c_N u$$

и сумма $\varphi_N(u, v) + f_{N-1}(u)$ является **линейной функцией u** . (Прим. ред.)

Таким образом,

$$f_N(v) = \max [\varphi_N(0, v) + f_{N-1}(0), \varphi_N(v, v) + f_{N-1}(v), \\ \varphi_N(B, v) + f_{N-1}(B)] \quad (3.53)$$

или

$$f_N(v) = \max [p_N v + K_{N-1}, K_{N-1} + L_{N-1} v, \\ -c_N(B - v) + K_{N-1} + L_{N-1} B]. \quad (3.54)$$

Так как в (3.54) — третья величина больше первых двух тогда и только тогда, когда $c_N < L_{N-1}$, значение $u = B$ выбирается только в этом случае. Когда $p_N < L_{N-1} < c_N$, максимальна вторая величина, а когда $L_{N-1} < p_N$, наибольшей является первая величина.

Следует заметить, что во всех случаях максимизирующее значение не зависит от v . Если $u = B$, то

$$f_N(v) = (K_{N-1} + L_{N-1}B - c_N B) + c_N v. \quad (3.55)$$

Следовательно, $K_N = K_{N-1} + L_{N-1}B - c_N B$ и $L_N = c_N$. Если $u = v$, то

$$f_N(v) = K_{N-1} + L_{N-1}v, \quad (3.56)$$

откуда $K_N = K_{N-1}$ и $L_N = L_{N-1}$. Наконец, при $u = 0$ получаем:

$$f_N(v) = K_{N-1} + p_N v \quad (3.57)$$

и $K_N = K_{N-1}$, $L_N = p_N$. В любом случае $f_N(v)$ есть линейная функция v , и новые коэффициенты зависят только от p_1, \dots, p_2 и c_1, \dots, c_N .

Остается рассмотреть второй случай, когда $p_N > c_N$. Так как функции $\varphi_N(u, v)$ и $f_{N-1}(v)$ линейны, мы должны исследовать только точки $u = 0$ и $u = B$.

Здесь

$$f_N(v) = \max [\varphi_N(0, v) + f_{N-1}(0), \varphi_N(B, v) + f_{N-1}(B)], \quad (3.58)$$

$$f_N(v) = \max [p_N v + K_{N-1}, p_N v - c_N B + K_{N-1} + L_{N-1} B]. \quad (3.59)$$

Мы имеем максимум при $u = 0$, если $L_{N-1} < c_N$, и при $u = B$, если $L_{N-1} \geq c_N$. В обоих случаях

$$f_N(v) = K_{N-1} + p_N v, \quad (3.60)$$

если $u=0$. Здесь $K_N=K_{N-1}$, $L_N=p_N$. С другой стороны,

$$f_N(v) = (K_{N-1} + L_{N-1}B - c_N B) + p_N v, \quad (3.61)$$

если $u=B$. Здесь $K_N=K_{N-1} + L_{N-1}B - c_N B$, $L_N=p_N$. Теорема 1 доказана.

27. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим экономическую интерпретацию этой задачи и исследуем наши аналитические результаты.

Очевидно, если $c_N > p_N$, мы имеем три альтернативы, зависящие от других параметров. Уравнения (3.55)–(3.57) можно истолковать следующим образом: (3.55) определяет закупку товара в количестве, достаточном для заполнения склада, и издержки при этом решении $\varphi_N(B, v)$ равны $c_N(B - v)$. С другой стороны, уравнение (3.56) означает осуществление каких-либо действий, издержки при таком решении, очевидно, равны 0. Наконец, уравнение (3.57) выражает продажу всех v единиц товара, которые были на складе к началу периода, что дает непосредственный доход $p_N v$.

Обращаясь к уравнению (3.60), где $p_N > c_N$, мы получаем несколько отличную интерпретацию. Здесь назначение политикой конечного уровня B означает продажу v единиц и покупку B единиц товара, что потребует затрат, равных $p_N v - c_N B$. Выбор, как и раньше, величины $u=0$ означает продажу всех v единиц, что приносит доход $p_N v$. Всего мы имеем четыре различные политики: продавать, покупать, продавать и покупать, ничего не предпринимать.

Все действия предпринимаются с учетом ограничений на емкость склада или уровень запасов.

28. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Напомним, что p_i и c_i — стоимостные показатели в момент, когда остается i периодов до конца. Проиллюстрируем полученное решение на примере следующего процесса, имеющего 10 периодов (см. таблицу 3.4).

Т а б л и ц а 3.4

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	3	5	2	3	3	4	3	2	8	8
p_i	2	3	1	5	5	4	1	7	6	3

Мы хотим вычислить K_{10} , L_{10} и u_{10} , коэффициенты функции дохода и политику, когда остается еще 10 периодов, т. е. решение, которое следует принять в начале процесса. Так как $f_1(v) = p_1 v$, мы заключаем, что $K_1 = 0$, $L_1 = p_1$ и $u_1 = 0$. Отсюда

$$K_1 = 0, \quad L_1 = 2, \quad u_1 = 0. \quad (3.62)$$

Заметим, что $c_2 > p_2$; это значит, что мы должны обратиться к уравнениям (3.55)—(3.57). Так как $L_1 < p_2$, применимо уравнение (3.57), которое дает значения

$$K_2 = 0, \quad L_2 = 3, \quad u_2 = 0. \quad (3.63)$$

Для третьего от конца периода вследствие (3.63) и соотношений $c_3 > p_3$ и $L_2 > c_3$ можем использовать уравнение (3.55). Следовательно,

$$K_3 = B, \quad L_3 = 2, \quad u_3 = 13. \quad (3.64)$$

Продолжая этот процесс, получаем:

$$\left. \begin{aligned} K_4 &= B, & L_4 &= 5, & u_4 &= 0, \\ K_5 &= 3B, & L_5 &= 5, & u_5 &= B, \\ K_6 &= 4B, & L_6 &= 4, & u_6 &= B, \\ K_7 &= 5B, & L_7 &= 3, & u_7 &= B, \\ K_8 &= 6B, & L_8 &= 7, & u_8 &= B, \\ K_9 &= 6B, & L_9 &= 7, & u_9 &= v, \\ K_{10} &= 6B, & L_{10} &= 7, & u_{10} &= v. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

Для этого конкретного примера можем сделать следующие выводы. При оптимальной политике прибыль составляет $6B + 7v$, где v — запас в начале процесса и B — вместимость

склада. Оптимальная политика требует, чтобы в течение первых двух периодов не предпринималось никаких действий, в третьем периоде было продано v и куплено B единиц, в течение четвертого и пятого периодов склад оставался заполненным, в течение шестого периода было продано B и куплено B единиц, в седьмом периоде продано B , а в восьмом куплено B единиц, которые следует продать в девятом периоде.

29. ВЫВОДЫ

Мы установили следующие результаты:

1. Оптимальный доход за N шагов является линейной функцией начального уровня, коэффициенты которой зависят от продажных и закупочных цен.

2. Оптимальная политика на любом шаге не зависит от уровня запасов в начале любого шага.

3. Оптимальная политика всегда имеет следующую простую структуру: не покупать и не продавать в течение k первых периодов (k может равняться нулю) и затем в течение оставшихся периодов держать склад либо пустым, либо заполненным.

30. ЗАДАЧА О ПОСТАВЩИКЕ

Эта задача сильно отличается от только что рассмотренной по формулировке, но имеет аналогичную аналитическую структуру. Она формулируется следующим образом.

«Поставщик знает, что в связи с обедами, которые он обязался обслуживать в течение следующих n дней, ему потребуется в j -й день r_j чистых салфеток, $j=1, 2, \dots, n$. Можно пользоваться двумя видами стирки: один требует $p-1$ дней и стоит b центов за салфетку, срочная стирка требует $q-1$ дней, $q < p$, и стоит c центов за салфетку, $c > b$. Перед началом процесса поставщик не имеет салфеток и покупает их по цене a центов за штуку. Как следует поставщику закупать и стирать салфетки, чтобы минимизировать суммарные затраты за n дней?»

Можно указать несколько различных подходов к этой задаче. Мы укажем три способа: один приводит к функциям большого числа переменных, второй — к весьма простому

аналитическому решению и, таким образом, к очень простому численному решению, третий дает простое непосредственное решение.

В основе второго подхода лежит важная идея, с помощью которой упрощаются многие задачи вариационного исчисления. Несмотря на существование тривиального решения, ниже мы обсудим эту идею, так как мы будем обращаться к ней в связи с процессами с «узкими местами» и при рассмотрении последовательных приближений.

31. ПОДХОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ — I

Первый подход к задаче с помощью методов динамического программирования состоит в следующем. Состояние процесса в любой момент может быть определено номером шага, т. е. днем, и числом салфеток, которые следует получить из стирки через $1, 2, \dots, p-1$ дней. На какой информации мы должны базировать наше решение о покупке некоторого числа салфеток и как организовать стирку использованных салфеток?

Нетрудно сформулировать задачу на этом пути, используя метод функциональных уравнений. К сожалению, если p велико, нас погубит размерность.

Как мы увидим, действительная размерность этой задачи в измененной формулировке равна $p-q$. На примере этой задачи мы очень хорошо проследим, как различные методы могут быть применены к одному и тому же процессу.

32. ПОДХОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ — II

Вместо упомянутого выше подхода будем действовать обычным образом с помощью уравнений, описывающих процесс, и на некоторой стадии решения привлечем метод динамического программирования.

Прежде всего из приведенной формулировки задачи ясно, что мы можем закупить все салфетки одновременно перед началом процесса. В таком случае начинаем с решения более простой задачи определения процесса стирки, если начальное количество салфеток равно S .

Очевидно,

$$S \geq \max_k r_k. \quad (3.66)$$

Сделаем теперь упрощающее предположение, что все использованные к концу дня салфетки немедленно отправляются в стирку, в срочную или обычную.

Тогда процесс продолжается следующим образом. В конце k -го дня поставщик делит r_k , количество имеющихся грязных салфеток, на две части: $r_k = u_k + v_k$, u_k салфеток посылаются в $(p-1)$ -дневную стирку и v_k — в $(q-1)$ -дневную.

Продолжая таким образом, мы видим, что количество x_k чистых салфеток в начале k -го дня определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_k &= (x_{k-1} - r_{k-1}) + u_{k-q} + v_{k-p}, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

где $u_k = v_k = 0$ для $k \leq 0$.

Издержки k -го дня равны

$$bv_k + cu_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.68)$$

Следовательно, суммарные расходы составляют:

$$C_N = b \sum_{k=1}^{N-1} v_k + c \sum_{k=1}^{N-1} u_k. \quad (3.69)$$

Задача состоит в минимизации величины C_N при следующих ограничениях на u_k :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 0 \leq u_k \leq r_k, \\ (b) \quad & x_k \geq r_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

Чтобы проиллюстрировать этот метод, рассмотрим сначала два частных случая:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & q = 1, \quad p = 2, \\ (b) \quad & q = 1, \quad p = 3, \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

а затем и общий случай.

33. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $q=1, p=2$

Здесь уравнения (3.67) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_2 &= (x_1 - r_1) + u_1, \\ x_3 &= (x_2 - r_2) + u_2 + v_1, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= (x_{n-2} - r_{n-2}) + u_{n-2} + v_{n-3}, \\ x_n &= (x_{n-1} - r_{n-1}) + u_{n-1} + v_{n-2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Теперь выразим x_k через u_k и v_k . Это — важный прием, с помощью которого мы существенно понижаем размерность процесса. С ним мы еще встретимся ниже.

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_2 &= (S - r_1) + u_1, \\ x_3 &= (S - r_1 - r_2) + (u_1 + u_2) + v_1, \\ x_4 &= (S - r_1 - r_2 - r_3) + (u_1 + u_2 + u_3) + \\ &\quad + v_1 + v_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= (S - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-2}) + (u_1 + u_2 + \\ &\quad + u_3 + \dots + u_{n-2}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-3}), \\ x_n &= (S - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1}) + (u_1 + u_2 + \\ &\quad + u_3 + \dots + u_{n-1}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-2}). \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

Так как $r_k = u_k + v_k$, то можно записать *):

$$x_k = S - v_{k-1} \quad (v_0 = 0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.74)$$

*) Результат можно получить проще. Так как при $q=1, p=2$ (32.2) имеет вид $x_k - x_{k-1} = -r_{k-1} + u_{k-1} + v_{k-2} = -(v_{k-1} - v_{k-2})$, то $x_k = -v_{k-1} + c$, где константа c определяется начальным условием $x_1 = S, v_0 = 0$. (Прим. ред.)

Обращаясь к (3.69), мы хотим минимизировать

$$C_N = c \sum_{k=1}^{N-1} r_k + (b-c) \sum_{k=1}^{N-1} v_k \quad (3.75)$$

по всем v_k при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 0 \leq v_k \leq r_k, \\ (b) \quad & S - v_{k-1} \geq r_k \text{ или } S - r_k \geq v_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Так как $(c-b) > 0$, мы хотим выбрать v_k как можно большими. Следовательно,

$$v_k = \min(r_k, S - r_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.77)$$

Это равенство определяет структуру оптимальной политики. Используя явный вид решения (3.77), нетрудно определить минимизирующее значение S .

34. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $q=k, p=k+1$

Выписав соответствующие уравнения, нетрудно видеть, что случай $q=k, p=k+1$ приводит к системе уравнений того же типа, что и выше. Это показывает, что уровень трудности задачи определяется разностью $p-q$.

35. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $q=1, p=3$ (I)

Чтобы проиллюстрировать метод, применимый к общему случаю, рассмотрим случай, когда $q=1, p=3$.

Уравнения (3.67) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_2 &= x_1 - r_1 + u_1, \\ x_3 &= x_2 - r_2 + u_2, \\ x_4 &= x_3 - r_3 + u_3 + v_1, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} - r_{n-1} + u_{n-1} + v_{n-3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_2 &= S - r_1 + u_1, \\ x_3 &= (S - r_1 - r_2) + u_1 + u_2, \\ x_4 &= (S - r_1 - r_2 - r_3) + u_1 + u_2 + u_3 + v_1, \\ &\vdots \\ x_n &= (S - r_1 - r_2 - r_3 - \dots - r_{n-1}) + u_1 + \\ &\quad + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S, \\ x_2 &= S - v_1, \\ x_3 &= S - v_1 - v_2, \\ x_4 &= S - v_1 - v_2 - v_3, \\ &\vdots \\ x_n &= S - v_{n-2} - v_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Мы хотим максимизировать сумму $\sum_{k=1}^{N-1} v_k$ при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} S - v_1 &\geq r_1, \\ S - v_1 - v_2 &\geq r_2, \\ &\vdots \\ S - v_{n-2} - v_{n-1} &\geq r_{n-1}, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} S - r_1 &\geq v_1, \\ S - r_2 &\geq v_1 + v_2, \\ &\vdots \\ S - r_{n-1} &\geq v_{n-2} + v_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

и

$$0 \leq v_i \leq r_i. \quad (3.82)$$

36. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $q=1, p=3$ (II)

Наша задача сводится к максимизации линейной формы

$$L_N = \sum_{k=1}^N v_k \quad (3.83)$$

при ограничениях вида

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \left. \begin{array}{l} b_1 \geq v_1, \\ b_2 \geq v_1 + v_2, \\ \vdots \\ b_N \geq v_N + v_{N-1}, \end{array} \right\} \\ \text{(b)} \quad r_k \geq v_k \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.84)$$

Выбрав v_1 , мы имеем задачу того же типа для остальных переменных v_2, v_3, \dots, v_N . Определим последовательность функций $\{f_k(x)\}$, $k=1, 2, \dots, N-1$, следующим образом:

$$f_k(x) = \max_{R_k} \sum_{l=k}^N v_l, \quad (3.85)$$

где R_k — область, определяемая условиями

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \left. \begin{array}{l} x \geq v_k \geq 0, \\ b_{k+1} \geq v_k + v_{k+1}, \\ \vdots \\ b_N \geq v_{N-1} + v_N, \end{array} \right\} \\ \text{(b)} \quad \left. \begin{array}{l} r_{k+1} \geq v_{k+1} \geq 0, \\ \vdots \\ r_N \geq v_N \geq 0. \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (3.86)$$

Имеем:

$$f_{N-1}(x) = \max [v_{N-1} + v_N], \quad (3.87)$$

где

$$\left. \begin{aligned} x &\geq v_{N-1} \geq 0, \\ b_N &\geq v_{N-1} + v_N, \quad r_N \geq v_N \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

Следовательно,

$$f_{N-1}(x) = \min [b_N, x + r_N]. \quad (3.89)$$

Опираясь на принцип оптимальности, мы видим, что

$$f_k(x) = \max_{0 \leq v_k \leq v_k^*} [v_k + f_{k+1}(\min(r_{k+1}, b_{k+1} - v_k))], \quad (3.90)$$

где $v_k^* = \min[x, b_{k+1}]$ для $k = 1, 2, \dots, N-1$.

37. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

С помощью элементарных выкладок теперь можно показать, что

$$f_k(x) = \min [P_k, x + Q_k], \quad (3.91)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_k &= \min [P_{k+1} + b_{k+1}, Q_{k+1} + b_{k+1}], \quad P_{N-1} = b_N, \\ Q_k &= \min [P_{k+1}, r_{k+1} + Q_{k+1}] \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

и $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Более того, аналогичный результат имеет место в общем случае, при любом целом значении $p - q$.

Мы провели этот анализ, чтобы показать, что метод функциональных уравнений можно использовать для получения явных аналитических решений в ряде задач составления расписаний, аналогичных поставленной в задаче § 36.

38. РЕШЕНИЕ, ОСНОВАННОЕ НА ЗДРАВОМ СМЫСЛЕ

Покажем теперь, что начальную задачу, сформулированную в § 30, можно решить с помощью очень простых рассуждений. Рассмотрим сначала случай, когда $q = 2$, $p = 4$.

Сохраняя прежние обозначения для величин u_k , v_k и x_k , получаем следующие два условия на v_k в виде неравенств, которым должны удовлетворять требования в те будущие периоды, на которые влияет решение, принятое в момент k :

$$\left. \begin{aligned} x_k - r_k - r_{k+1} + v_{k-2} + u_{k-1} + u_k &\geq r_{k+2}, \\ x_k - r_k - r_{k+1} - r_{k+2} + u_{k-1} + u_k + \\ &+ u_{k+1} + v_{k-3} + v_{k-2} + v_{k-1} \geq r_{k+3}. \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

Рассмотрим процесс образования запасов товара одного наименования. Предположим, что в каждый из конечного числа промежутков времени производятся заказы на дальнейшие поставки этого товара на склад и эти заказы немедленно выполняются. После того как заказ на товар сделан и удовлетворен, на него возникает спрос. Этот спрос удовлетворяется по мере возможностей, причем каждое превышение спроса над уровнем запасов ведет к убыткам.

Допустим, что известны следующие функции:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \varphi(s) ds — \text{вероятность того, что величина спроса нахо-} \\ \text{дится между } s \text{ и } s + ds; \\ \text{(b)} \\ k(z) — \text{стоимость заказа партии размером } z \text{ единиц} \\ \text{для пополнения уровня запасов;} \\ \text{(c)} \\ p(z) — \text{стоимость заказа партии размером } z \text{ единиц} \\ \text{для покрытия неудовлетворенного спроса, или} \\ \text{размер штрафа.} \end{array} \right\} \quad (3.99)$$

Для простоты предположим, что эти функции не зависят от времени. Наша цель — определить политику заказов, которая минимизировала бы ожидаемые расходы за весь N -шаговый процесс. Введем теперь следующую функцию:

$f_N(x)$ — математическое ожидание издержек для N -шагового процесса при начальном запасе x и оптимальной (3.100) политике заказов.

Предположим, что на первом шаге мы заказали $y - x$ единиц, так что уровень запасов поднимается до y . Тогда ожидаемые издержки задаются функцией

$$k(y - x) = \int_y^{\infty} p(s - y) \varphi(s) ds. \quad (3.101)$$

Следовательно,

$$f_1(x) = \min_{y \geq x} \left[k(y - x) + \int_y^{\infty} p(s - y) \varphi(s) ds \right]. \quad (3.102)$$

Обычные рассуждения, основанные на перечислении всех возможностей, соответствующих различным случаям превышения

спроса над уровнем запасов и уровня запасов над спросом, приводят к рекуррентному соотношению

$$f_n(x) = \min_{y \geq x} \left\{ k(y - x) + \int_y^\infty p(s - y) \varphi(s) ds + \right. \\ \left. + f_{n-1}(0) \int_y^\infty \varphi(s) ds + \int_0^y f_{n-1}(y - S) \varphi(s) ds \right\}, \quad (3.103) \\ n \geq 2. \quad \left. \right\}$$

Мы рекомендуем читателю сравнить эту задачу с задачей § 10 главы II. Там мы имели дело с ожидаемыми текущими издержками, связанными с принятием определенного решения; здесь же мы имеем случайные текущие издержки, связанные с решением, и новое состояние, которое также случайно. В обоих случаях мы встречаемся с одной и той же формализацией.

40. ОБСУЖДЕНИЕ

С вычислительной стороны мы имеем осуществимый алгоритм вычисления последовательности $\{f_N(x)\}$ и оптимальной политики заказов $\{y_N(x)\}$. Однако при различных предположениях относительно функций $k(z)$, $p(z)$ и $\varphi(s)$ мы можем продолжить исследование и получить простую характеристику оптимальной политики.

Особенно интересен случай, когда $k(z)$ и $p(z)$ — линейные функции вида

$$\left. \begin{aligned} k(z) &= kz, & k > 0, \\ p(z) &= pz, & p > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Здесь мы можем показать, что оптимальная политика имеет очень простую и понятную структуру, именно: для каждого N существует такой уровень запасов S_N , что если $x > S_N$, мы ничего не заказываем, если же $x < S_N$, мы заказываем $S_N - x$, поднимая уровень запасов до S_N .

На первый взгляд приведенные выше функциональные уравнения не похожи на соотношения, полученные в задаче о замене оборудования и ее обобщениях. Если, однако, мы

рассмотрим только дискретные значения уровня запасов и дискретные значения величины спроса, мы получим уравнения следующего вида:

$$f_n(i) = \min_{j \geq i} \left[k(j-i) + \sum_{r=j+1}^{\infty} p(r-j) \varphi_r + f_{n-1}(0) \sum_{r=j}^{\infty} \varphi_r + \right. \\ \left. + \sum_{r=0}^j f_{n-1}(j-r) \varphi_r \right] \quad (3.105)$$

для $i = 0, 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots$

Мы увидим далее, что уравнение оптимального управления запасами можно рассматривать как частный случай общего уравнения для марковских процессов решения, рассмотренных в главе XI.

41. ДАЛЬНЕЙШИЕ УПРОЩЕНИЯ

В некоторых случаях детерминированная задача управления запасами, которая представляет собой одномерную задачу, требующую вычисления последовательности функций одной переменной (это достаточно простая задача для вычислительной машины), может быть сведена к еще более простой задаче, для решения которой достаточно ручного счета *).

Для i -го периода, $i = 1, 2, \dots, N$, определим следующие величины:

$$\begin{aligned} d_i &— \text{величина спроса,} \\ i_i &— \text{расходы на хранение единицы товара} \\ &\quad \text{в течение следующего периода,} \\ S_i &— \text{организационные издержки (затраты} \quad (3.106) \\ &\quad \text{на совершение сделки),} \\ x_i &— \text{величина заказа.} \end{aligned}$$

Мы требуем, чтобы весь спрос удовлетворялся, и хотим минимизировать суммарные издержки. Считается, что заказ требует только организационных затрат: фактические расходы

*) Описанная ниже задача, по существу, отличается от предшествующей. Учитываются единовременные затраты, связанные с самим актом заказа, и затраты на хранение. Решается задача о компромиссном выборе между политиками регулярных многочисленных закупок и малого времени хранения и политиками редких закупок и длительного хранения. (*Прим. ред.*)

на закупку товаров мы не включаем, так как предполагается, что стоимость заказа линейно зависит от его объема, причем стоимость единицы товара постоянна. Отсюда следует, что, за исключением организационных расходов, суммарная стоимость заготовки одинакова для любой программы удовлетворения спроса.

Пусть I обозначает запас товаров в начале периода. Легко доказать следующие утверждения.

1. Существует оптимальная программа, для которой $Ix_i = 0$ для всех i . Иначе говоря, если в начале периода имеется излишек товара, то мы не производим никаких заказов.

2. Существует такая оптимальная программа, что для всех i или $x_i = 0$, или для некоторого k , $i \leq k \leq N$, $x_i = \sum_{j=1}^k d_j$. Иначе говоря, заказываем как раз столько товара, сколько нужно для удовлетворения будущего спроса в течение некоторого будущего периода k .

3. Существует такая оптимальная программа, что если спрос d_{i^*} удовлетворяется некоторым заказом $x_{i^{**}}$, $i^{**} < i^*$, то d_i , $i = i^{**} + 1, \dots, i^* - 1$, также удовлетворяется этим заказом.

4. Если для периода i мы имеем $I = 0$, то в оптимальной политике периоды $1, 2, \dots, i - 1$ можно рассматривать независимо от оставшейся части процесса.

Обозначив через $F(i)$ минимальные издержки за периоды $1, 2, \dots, i$, мы получаем:

$$F(i) = \min \left[\min_{1 \leq j < i} \left[S_j + \sum_{h=j}^{i-1} \sum_{k=h+1}^i i_h d_k + F(j-1) \right], \right. \\ \left. S_i + F(i-1) \right], \quad (3.107)$$

где $F(1) = S_1$ и $F(0) = 0$.

Следовательно, мы вычисляем одну функцию одной переменной вместо последовательности функций одной переменной.

42. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИИ

Последняя задача, которую мы хотим рассмотреть, представляет собой простой пример из важного класса задач, связанных с организацией производства. К очень немногим задачам этого класса найдены подходы, а так как решение,

которым мы располагаем, весьма изящно, по-видимому, целесообразно его здесь привести. Его можно использовать, чтобы получить приближенные решения более сложных вариантов.

Рассмотрим N различных деталей, которые должны пройти последовательную обработку на двух машинах. На каждой стадии процесса каждая машина может обрабатывать лишь одну деталь. Допустим, что порядок прохождения деталями обработки не может быть изменен после начала процесса. Для каждой детали задано время обработки на каждой машине. В каком порядке следует подавать детали на первую машину, чтобы минимизировать суммарное время, необходимое для обработки всех деталей?

43. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть

a_i — время обработки i -й детали на первой машине,

b_i — время обработки i -й детали на второй машине.

Процесс протекает следующим образом. Детали располагаются в некотором порядке, например 1, 2, ..., N , что схематически изображено на рис. 52. После того как первая деталь

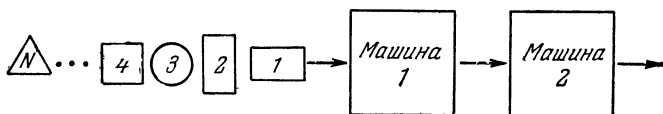


Рис. 52.

прошла через машину 1, она подается на машину 2. Как только машина 1 кончает обработку первой детали, машина 2 начинает ее обработку. Машина 2 не может приступить к обработке второй детали, пока она полностью не закончит обработку первой.

Задача состоит в том, чтобы установить порядок запуска деталей в обработку, минимизирующий суммарное время простоя второй машины в ожидании деталей от первой машины. Сложность этой задачи является следствием того факта, что различные детали требуют разного времени обработки на машинах.

Пусть

x_i — период простоя второй машины перед тем, как на нее поступает i -я деталь. (3.108)

Имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1, \\ x_2 &= \max(a_1 + a_2 - b_1 - x_1, 0), \\ x_1 + x_2 &= \max(a_1 + a_2 - b_1, a_1), \\ x_3 &= \max\left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^2 b_i - \sum_{i=1}^2 x_i, 0\right), \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \max\left(\sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{i=1}^3 b_i, \sum_{i=1}^2 a_i - b_1, a_1\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.109)$$

и по индукции

$$\sum_{i=1}^N x_i = \max_{1 \leq n \leq N} K_n, \quad (3.110)$$

где

$$K_n = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i. \quad (3.111)$$

Мы хотим найти перестановку деталей, которая минимизировала бы выражение (3.110).

Хотя этого можно достичь и прямыми методами с помощью приведенных выше рассуждений, будет поучительно использовать метод функциональных уравнений, что мы и сделаем.

44. ПОДХОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Введем следующую функцию:

$f(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N, t)$ — время, необходимое для обработки N деталей при условии, что вторая машина начинает работать на t единиц времени позже первой, a_i, b_i — время, необходимое для обработки i -й детали соответственно на первой и второй машинах, и при этом используется оптимальная перестановка деталей. (3.112)

Если машины начинают обработку с i -й детали, то мы получаем функциональное уравнение

$$f(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N, t) = \\ = \min [a_1 + f(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, 0, 0, \dots, a_N, b_N; \\ b_i + \max(t - a_i, 0))], \quad (3.113)$$

где на месте пары (a_i, b_i) стоит пара $(0, 0)$.

Чтобы из этого соотношения получить оптимальную перестановку, поменяем местами две детали. Тогда, обрабатывая сначала i -ю, а затем j -ю деталь, получим:

$$f(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N; t) = \\ = a_i + a_j + f(a_1, b_1, \dots, 0, 0, \dots, a_N, b_N; t_{ij}), \quad (3.114)$$

где

$$t_{ij} = b_j + \max[b_i + \max(t - a_i, 0) - a_j, 0] = \\ = b_j + b_i - a_j + \max[\max(t - a_i, 0), a_j - b_i] = \\ = b_j + b_i - a_j + \max[t - a_i, a_j - b_i, 0] = \\ = b_j + b_i - a_j - a_i + \max[t, a_i + a_j - b_i, a_i] = \\ = b_j + b_i - a_j - a_i + \max[t, \max[a_i + a_j - b_i, a_i]]. \quad (3.115)$$

Теперь мы видим, что если

$$\max[a_i + a_j - b_i, a_i] < \max[a_i + a_j - b_j, a_j], \quad (3.116)$$

то i -ю и j -ю деталь имеет смысл поменять местами.

Этот критерий может быть переписан в виде

$$a_i + a_j + \max[-b_i, -a_j] < a_i + a_j + \\ + \max[-b_j, -a_i]. \quad (3.117)$$

Таким образом, мы сравниваем *)

$$\max[-b_i, -a_j] \text{ и } \max[-b_j, -a_i]. \quad (3.118)$$

45. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ

Чтобы в соответствии с предыдущим результатом определить оптимальную перестановку, нужно действовать следующим образом.

*) Перестановка необходима, если

$$\min[b_i, a_j] > \min[b_j, a_i],$$

откуда непосредственно следует данное в § 45 простое правило. (Прим. ред.)

1. Записать значения a_i и b_i в двух вертикальных колонках (таблица 3.6).

Т а б л и ц а 3.6

i	a_i	b_i
1	a_1	b_1
2	a_2	b_2
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
N	a_N	b_N

2. Отыскать среди значений a_i и b_i наименьшее.

3. Если таковым окажется одно из a_i , поставить соответствующую деталь первой.

4. Если это b_i — поставить соответствующую деталь последней.

5. Вычеркнуть оба значения a_i и b_i из списка.

6. Повторять этот процесс с $2n - 2$ оставшимися величинами.

7. В случае нескольких минимальных элементов для определенности выбрать деталь с меньшим номером. Когда $a_i = b_i$, упорядочивать детали по значению a_i .

46. ПРИМЕР

Рассмотрим следующий пример:

i	a_i	b_i
1	4	5
2	4	1
3	30	4
4	6	30
5	2	3

На первом шаге мы имеем:

i	a_i	b_i
1	4	5
3	30	4
4	6	30
5	2	3
2	4	1

На следующем шаге

i	a_i	b_i
5	2	3
1	4	5
3	30	4
4	6	30
2	4	1

Теперь мы видим, что оптимальной перестановкой будет (5, 1, 4, 3, 2).

47. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы ставили перед собой цель показать, что ряд задач составления расписаний, одни из которых действительно называются задачами составления расписаний, а другие маскируются под названием задач сглаживания, замены оборудования и управления запасами, могут быть решены методами динамического программирования. Большинство из этих задач сводится к несложному машинному счету, в других же задачах этого класса метод функциональных уравнений позволяет найти явные выражения для оптимальной политики и функции дохода.

Мы уже подчеркивали ранее, что одна из важнейших причин, по которой мы обратились к этим простым моделям экономических процессов, состоит в том, что полученные решения помогают получить приближенные политики в более сложных моделях. Кроме того, анализ чувствительности этих решений приведет нас к построению более общих моделей.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Рассматриваемому вопросу посвящено большое число работ. Заинтересованному читателю мы рекомендуем следующие работы:

- R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957 [русский перевод: Р. Беллман, *Динамическое программирование*, ИЛ, 1960].
R. Bellman, *Mathematical aspects of scheduling theory*, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 4, 1956, pp. 168—205.
K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, California, 1958.

Кроме того, ряд работ по этим вопросам, касающихся математической стороны задач, можно найти в выпусках журналов:

Journal of the Operations Research Society of America, *Management Science*, *Naval Research Logistics Quarterly*, *Econometrica* и *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*.

§ 4. Для изучения некоторых непрерывных вариантов задачи сглаживания см. главы 4, 5 книги Эрроу, Карлина и Скарфа, упомянутой выше.

Перечислим некоторые другие статьи:

- R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, *Some problems in the theory of dynamic programming — a smoothing problem*, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 2, 1954, pp. 82—89.
E. H. Bowman, *Production scheduling by the transportation method for linear programming*, *Operations Research*, vol. 4, 1956, pp. 100—103.
A. Charnes, W. W. Cooper and B. Mellon, *Model for optimizing production by references to cost surrogates*, *Econometrica*, vol. 23, 1955, pp. 307—323.
G. B. Dantzig and S. Johnson, *A Production Smoothing Problem*, The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1432, 1955.
A. Hoffman and W. Jacobs, *Smooth patterns of production*, *Management Science*, vol. 1, 1954, pp. 86—91.
S. M. Johnson, *Sequential production planning over time at minimum cost*, *Management Science*, vol. 3, 1957, pp. 435—437.
W. Karush and A. Vaszonyi, *Mathematical programming and service scheduling*, *Management Science*, vol. 3, 1957, pp. 140—148.
F. Modigliani and F. Hohn, *Production planning over time and the nature of the expectation and planning horizon*, *Econometrica*, vol. 23, 1955, pp. 46—66.
F. Morin, *Note on an inventory problem*, *Econometrica*, vol. 23, 1955, pp. 447—450.

§ 11. Задачи аналогичного характера возникают в статистической механике. Освещение как теоретической, так и вычислительной сторон этих задач можно найти в работе:

J. W. Cahn and R. Kikuchi, Theory of Domain Walls in Ordered Structures — II. Pair Approximation for Nonzero Temperatures, Hughes Research Laboratories, Research Report, No. 177, 1961.

§ 12. Задаче о замене оборудования посвящено большое число работ. Традиционные подходы к решению и прикладная сторона вопроса изложены в книге:

T. Whittin, The Theory of Inventory Management, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1953.

Вариационные методы, использующие непрерывную модель, читатель найдет в статье:

A. Alchian, Economic Replacement Policy, The RAND Corporation, Report R-224, April 12, 1952.

Изложенный в настоящей главе метод описан в статьях:

R. Bellman, Equipment replacement policy, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 3, 1955, pp. 133—136.

S. Dreyfus, A generalized equipment study, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 8, 1960, pp. 425—435.

Этой задаче посвящены также работы:

B. J. Marks, A Dynamic Approach to the Prediction of Demand for Replacement Parts. 1960 (не опубликовано).

D. W. Jorgenson, Optimal Scheduling of Replacement and Checkout — IV; Computation by Successive Approximations, 1960 (не опубликовано).

D. W. Jorgenson and R. Radner, Optimal Replacement and Inspection of Stochastically Failing Equipment, Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford, Stanford Univ. Press, 1962.

T. Fukao, T. Yamazaki and S. Kimura, An application of dynamic programming to economic operation problem of a power system, Electrotechnical J. of Japan, vol. 5, no. 2, 1959, pp. 64—68.

T. Fukao and T. Yamazaki, A computational method of economic operation of hydrothermal power system including flow-interconnected hydropower plants (Dynamic linear programming method), Electrotechnical J. of Japan, vol. 6, 1960, pp. 22—26.

T. Fukao, Operation problems of flow — interconnected hydro-plants systems, II, Bull. Electrotechnical Lab., vol. 24, no. 6, 1960; III, no. 7.

A. J. Truelove, Strategic reliability and preventive maintenance, Operations Research, vol. 9, 1961, pp. 22—29.

A. J. Rowe, Application of Computer Simulation to Sequential Decision Rules in Production Scheduling, System Development Corporation, SP. 112, 1959.

- Y. Fukuda, Optimal Disposal Policies, Naval Res. Logist. Quart., vol. 8, N 3, 1961, pp. 221—227.
- A. Kaufmann, Methodes et Modèles de la Recherche Opérationnelle, Dunod, Paris, 1959.
- W. Sinden, The replacement and expansion of durable equipment, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 8, 1960, pp. 466—480.
- W. Szwarc, Solution of the Akers—Friedman scheduling problem, Operations Research, vol. 8, 1960, pp. 782—788.
- E. W. Barankin and J. Denny, Examination of an Inventory Model Incorporating Probabilities of Obsolescence, University of California Statistical Laboratory, 1960.
- E. W. Barankin, A Delivery-lag Inventory Model with an Emergency Provision, Naval Res. Logist. Quart., vol. 8, № 3, 1961, pp. 285—311.
- R. E. Levitan, The optimum reject allowance problem, Management Science, vol. 6, 1959, pp. 172—186.
- R. McNaughton, Scheduling with deadlines and loss functions, Management Science, vol. 6, 1959, pp. 1—12.
- R. Radner, Opportunistic Replacement of a Single Part in the Presence of Several Monitored Parts, Management Science, vol. 10, N 1, 1963.

Более реалистическая ситуация, когда темпы ремонта и старения заранее известны не полностью, также может быть проанализирована с помощью динамического программирования. См. по этому поводу

- R. Bellman, Adaptive Control Processes, A. Guided Tour University Press, Princeton, New Jersey, 1961 [русский перевод: Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, Изд-во «Наука», 1964].

Очень интересный тип задачи о замене и ремонте был недавно рассмотрен Д. Дж. Уайтом. Эта задача состоит в нахождении момента обследования системы. Функциональное уравнение имеет вид

$$f_n(x) = \max_{m \leq n} T(m, x, f_m(x)).$$

§ 20. В таком виде задача была поставлена А. В. Каном

- A. S. Cahn, The warehousing problem, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1948, p. 1073

и обобщена в статье:

- A. Charnes and W. W. Cooper, Generalization of the Warehousing Model, Operat. Res. Quart., vol 6, № 4, 1955, pp. 131—172.

Приведенное решение задачи содержится в статьях:

- R. Bellman, On the theory of dynamic programming: a warehousing problem, Management Science, vol. 2, 1956, pp. 272—276.

- S. Dreyfus, An analytic solution of the warehousing problem, Management Science, vol. 4, 1957, pp. 99—104.

Аналитическое решение приводится во второй из этих статей.

§ 30. Задача поставщика решалась как методами динамического программирования, так и другими методами. См. по этому вопросу

W. Jacobs, The caterer problem, Naval Research Logs. Q., vol. 1, 1954, pp. 154—165.

J. W. Gaddum, A. J. Hoffman and D. Sokolowsky, On the solution to the caterer problem, *ibid.*

W. Prager, On the Caterer Problem, *Manag. Sci.*, vol. 3, № 1, 1956, pp. 15—23.

Метод, используемый в §§ 30—37, содержится в работе:

R. Bellman, On a dynamic programming approach to the caterer problem — I, *Management Science*, vol. 3, 1957, pp. 270—278.

Он возник из аналитического решения для случая $q=1$, $p=2$, полученного О. Гроссом. Этот метод замечателен тем, что может быть использован в ряде ситуаций, где решение, подсказываемое «здравым смыслом», проваливается. Кроме того, его основные идеи применимы и во многих других ситуациях. См. § 14 главы VIII и

R. Bellman, Some new techniques in the dynamic programming solution of variational problems, *Q. Appl. Math.*, vol. 16, 1958, pp. 295—305.

R. Bellman and R. Kalaba, Reduction of dimensionality, dynamic programming and control processes, *J. Basic Engineering*, March 1961, pp. 82—84.

§ 38. Это решение содержится в нескольких неопубликованных работах С. Дрейфуса. Оно эквивалентно решению Била, см.

E. M. Beale, Letter to the Editor, *Management Science*, vol. 4, 1957, p. 110.

§ 39. Обширную библиографию по рассматриваемому вопросу можно найти в книге Эрроу, Карлина и Скарфа, на которую мы ссылались выше, а также в главе 5 книги Беллмана.

Первые работы в этой области:

K. J. Arrow, T. E. Harris and J. Marschak, Optimal inventory policy, *Econometrica*, July 1951.

A. Dvoretzky, J. Kiefer and J. Wolfowitz, The inventory problem, I, II, *Econometrica*, vol. 20, 1952, pp. 187—222.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, On the optimal inventory equation, *Management Science*, vol. 2, 1955, pp. 83—104.

Первое содержательное математическое рассмотрение задачи управления запасами содержится в статье Эрроу, Харриса и Маршака. Первые варианты теорем существования и единственности и случай неизвестного распределения спроса рассмотрены Дворецким, Кифером и Вольфовицем. Функциональные уравнения впервые были использованы для определения структуры оптимального решения

Беллманом, Гликсбергом и Гроссом; эти исследования были широко развиты Эрроу, Карлином и Скарфом в их книге. Некоторые последние результаты приведены в этой книге и в следующих работах:

- B. Lefkowitz et al., The Development and Implementation of Advanced Inventory Control Procedures, Stanford Procedures, Stanford Research Institute, 1960.
- G. Hadley and T. M. Whitin, A Dynamic Model for Procurement, Stanford Research Institute TM-13, 1961.
- G. Hadley and T. M. Whitin, Optimal Procurement Policy under Conditions of Repetitive Demand Cycles, Stanford Research Institute TM-14, 1961.
- S. G. Allen, A Redistribution Model with Set-up Charge, Management Science, vol. 8, N 1, 1961, pp. 99—108.
- P. R. Winters, Constrained Inventory Rules for Production Smoothing, ONR Research Memorandum No. 79, Carnegie Institute of Technology, 1961.
- W. Sadowski, A Few Remarks on the Assortment Problem, Manag. Sci., vol. 6, № 1, 1959, pp. 13—24.
- H. Kasugai and T. Kasegai, Note on minimax regret ordering policy, J. Oper. Res. Japan, vol. 3, 1961, pp. 155—169.
- H. Scarf, Optimal Policies for the Inventory with Stochastic Lead Time, Manag. Sci., vol. 8, № 1, 1961, pp. 35—57.
- M. Beckmann, An Inventory Model for Arbitrary Interval and Quantity Distributions of Demand, Planning Research Corporation, Los Angeles, September 1960.
- Y. Fukuda, Bayes and Maximum Likelihood Policies for a Multi-echelon Inventory, Planning Research Corporation, Los Angeles, June 1960.
- A. J. Gradwohl, Case Studies on the Multi-echelon Inventory Problem, Planning Research Corporation, Los Angeles, December 1959.
- Y. Fukuda, Optimal Disposal Policies, Naval Res. Logist. Quart., vol. 8, № 3, 1961, pp. 221—227.

Обсуждение математической теории управления запасами с чисто описательной стороны читатель найдет в книге:

P. A. P. Moran, The Theory of Storage, Methuen and Co., 1959, в которой дается ряд других ссылок.

Наконец, назовем еще неопубликованную работу Д. Айгглхарта, касающуюся асимптотического поведения решения уравнений типа (4.103) при $n \rightarrow \infty$. После того как было установлено, что $f_n \sim nc$ при $n \rightarrow \infty$, центр тяжести исследований переместился в область установившейся политики. Кроме того, эта политика может быть найдена другими путями, которые позволяют обходить неприятные стороны динамического программирования, связанные с размерностью.

§ 41. См.

H. M. Wagner and T. M. Whitin, Dynamic versions of economic lot size model, *Management Science*, vol. 5, 1958, pp. 89—96.

§ 42. Решение, приведенное здесь, впервые получено другим путем Джонсоном. См.

S. Johnson, Optimal two-and-three-stage production schedules with setup times included, *Naval Research Logs. Q.*, March 1954.

Дальнейшие результаты и ссылки см. в работах:

F. M. Tonge, A Heuristic Program for Assembly Line Balancing, The RAND Corporation, Paper P-1993, 1960.

R. Bellman, Mathematical aspects of scheduling theory, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 4, 1956, pp. 168—205.

B. Giffler, Mathematical Solution of Production Planning and Scheduling Problems, IBM Technical Report, Advanced Systems Development Division, 1960.

I. Nabeshima, The order of n items processed on m machines, *J. Oper. Res. Soc. Japan*, vol. 3, 1961, pp. 170—175; vol. 4, 1961, pp. 1—8.

Рассмотрение стохастических процессов принятия решений дано в работах:

E. S. Phelps, The Accumulation of Risky Capital: A Discrete — time Sequential Utility Analysis, Cowles Discussion Paper, 1961.

M. Shubik, Approaches to the study of decision-making relevant to the firm, *J. Business*, vol. 34, 1961, pp. 101—118.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Сравнительно элементарное изложение теории управления запасами содержится в недавно вышедшей книге

G. Hadley, T. M. Whitin, *Analysis of inventory systems*, Prentice—Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

Из новых работ по теории замены оборудования отметим, например,

D. W. Jorgenson, J. J. McCall, Optimal replacement policies for a ballistic missile, *Management Science*, vol 9, N 3, 1963.

R. Radner, D. W. Jorgenson, Opportunistic replacement of a single part in the presence of several monitored parts, *Management Science*, vol. 10, N 1, 1964, pp. 70—84.

ГЛАВА IV

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПОИСКА

I. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах мы неоднократно встречались с уравнением вида

$$f_N(x) = \max_y g(x, y, f_{N-1}(y)),$$

где максимум находился прямым перебором всех возможностей. Если y принимает различные значения y_1, y_2, \dots, y_M , то такой способ требует вычисления $g(x, y_1, f_{N-1}(y_1))$, $g(x, y_2, f_{N-1}(y_2))$ и т. д. и сравнения полученных значений. При больших M эти операции требуют много времени.

Возникает вопрос о более эффективном способе определения положения максимума. Это — важный вопрос, ибо возможность решения задачи тем или иным методом зависит от количества времени, необходимого для получения решения. Чтобы обеспечить точность решения, мы часто можем испытывать на каждом шаге большое число политик. Следовательно, нам важно изучить сам процесс поиска. Мы покажем, что в одном важном и часто встречающемся случае существуют способы, феноменально сокращающие требуемое время. Попутно с определением положения максимума функции мы изучим задачу об определении нуля монотонно убывающей функции.

Перечисленные вопросы являются частными случаями общей задачи поиска — задачи чрезвычайной трудности, даже когда речь идет только о ее постановке. Весьма занятно, что при численном решении задач динамического программи-

рования возникают новые задачи динамического программирования.

Результаты и методы этой главы принадлежат О. Гроссу и С. Джонсону.

2. УНИМОДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Прежде всего введем понятие унимодальной функции.

Определение. Функция $f(x)$ унимодальна на интервале $[0, b]$, если существует значение x_0 , $0 \leq x_0 \leq b$, такое, что $f(x)$ или строго возрастает при $x \leq x_0$ и строго убывает при $x > x_0$ или строго возрастает при $x < x_0$ и строго убывает при $x \geq x_0$.

Наиболее важным примером функций такой природы являются вогнутые функции.

3. ОДНОМЕРНЫЙ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС НАХОЖДЕНИЯ ТОЧКИ МАКСИМУМА

Очевидно, что свойство унимодальности никогда не дает нам возможности вычислить точное значение максимума $f(x)$, но оно позволит очень точно определить положение точки x_0 .

Теорема 1. Пусть $y = f(x)$ является унимодальной на интервале $0 \leq x \leq L_n$. Предположим, что L_n есть число, обладающее тем свойством, что точка, в которой $f(x)$ достигает максимума, может быть локализована внутри интервала единичной длины путем вычисления и взаимного сравнения не более n значений $f(x)$. Введем величину

$$F_n = \sup L_n. \quad (4.1)$$

Тогда

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ при } n \geq 2$$

и $F_0 = F_1 = 1$.

Числа F_n — числа Фибоначчи, которые часто встречаются в самых неожиданных местах. Мы рассмотрим их свойства ниже.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Заметим, что $F_0 = 1$ и $F_1 = 1$, так как единственное значение унимодальной функции, по существу, не дает никакой дополнительной информации относительно положения точки максимума.

Фиксируем $n \geq 2$ и вычислим $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, где x_1, x_2 — две точки из интервала $(0, L_n)$ и $x_1 < x_2$. Если $y_1 > y_2$, то точка максимума находится в интервале $[0, x_2]$, в то время как при $y_2 > y_1$ точка максимума лежит в интервале $[x_1, L_n]$. Если $y_1 = y_2$, то выбираем любой из этих

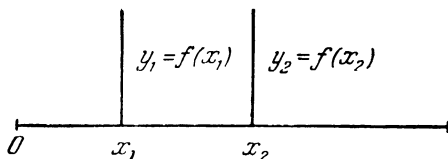


Рис. 53.

интервалов, даже если нам известно, что максимум достигается на интервале $[x_1, x_2]$.

Теперь мы имеем подынтервал интервала $[0, L_n]$ и значения $f(x)$ в одной из его внутренних точек.

Для $n = 2$, $L_2 = 2 - \epsilon$, где ϵ мало, можно выбрать $x_1 = 1 - \epsilon$, $x_2 = 1$. Это показывает, что $\sup L_2 \geq 2$. С другой стороны, из вышесказанного следует $\sup L_2 < 2 + \delta$ для любого $\delta > 0$. Следовательно,

$$F_2 = 2 = F_1 + F_0. \quad (4.2)$$

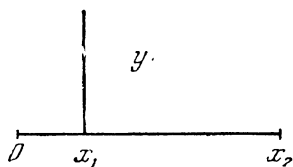


Рис. 54.

Далее предположим, что $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k = 2, \dots, n-1$. Основываясь на этом предположении, мы хотим показать, что

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (4.3)$$

Допустим, что мы вычислили $f(x)$ в двух точках x_1 и x_2 интервала $[0, L_n]$ (см. рис. 53). Если $y_1 > y_2$, то мы находимся в ситуации, изображенной на рис. 54. Отсюда $x_2 < F_{n-1}$, так как мы можем выбрать еще только $n-2$ точек, поскольку наш первый выбор из $n-1$ возможных точек пал на x_1 . Кроме того, $x_1 < F_{n-2}$, так как максимум должен находиться на интервале $(0, x_1)$ и имеется возможность выбрать еще только $n-2$ точек. Аналогично, если $y_2 > y_1$, мы имеем $L_n - x_1 < F_{n-1}$. Таким образом,

$$L_n < x_1 + F_{n-1} < F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (4.4)$$

откуда

$$F_n = \sup L_n \leq F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (4.5)$$

Остается вывести обратное неравенство. Положим

$$\begin{aligned} L_n &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (F_{n-1} + F_{n-2}), \quad x_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) F_{n-2}, \\ x_2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) F_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Так как ε можно выбрать произвольно малым, то

$$F_n \geq F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Из этих двух неравенств следует требуемое равенство. Кроме того, отсюда мы получаем для любого малого ε оптимальную процедуру поиска. Сравнив $f(x_1)$ и $f(x_2)$, мы получаем интервал длины $L_{n-1} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) F_{n-1}$ и значение функции в первой точке оптимального поиска внутри меньшего интервала. Продолжая таким же образом, имеем $L_k = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) F_k$ для $2 \leq k \leq n$. Наконец, $L_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) F_2 = 2 - \varepsilon$, так что последний интервал имеет единичную длину.

4. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

Несмотря на то, что первые члены последовательности $\{F_n\}$, порожденной рекуррентным соотношением

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1, \quad (4.7)$$

не велики и вначале растут медленно:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots, \quad (4.8)$$

все же уже F_{20} превышает 10 000. Таким образом, при количестве точек, не превышающем 20, мы всегда можем найти интервал, длина которого составляет 10^{-4} длины первоначального и который содержит точку максимума.

Чтобы определить аналитический вид F_n , заметим, что r^n является решением уравнения (4.7) без граничных условий, если

$$r^2 = r + 1. \quad (4.9)$$

Эти значения r равны $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Следовательно, если мы положим

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (4.10)$$

то, подобрав соответствующим образом значения для c_1 и c_2 , мы получим решение (4.7). Таким образом,

$$1 = c_1 + c_2,$$

$$1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \quad (4.11)$$

и мы имеем:

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}. \quad (4.12)$$

Так как $(\sqrt{5} + 1)/2 > 1$ и $(\sqrt{5} - 1)/2 < 1$, мы видим, что при больших n величина F_n равна $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$ с большой точностью. Отсюда следует, что ценой дополнительных вычислений небольшого объема можно получить экспоненциальное возрастание точности. Отношение F_n/F_{n-1} стремится к $(\sqrt{5} + 1)/2$, что приблизительно равно 1,62. Следовательно, первые два значения x_1 и x_2 следует взять на расстоянии $0,62 L$ от концов интервала $[0, L]$. Такая политика равномерного выбора является превосходной приближенной политикой для всего процесса, за исключением нескольких последних шагов, когда уже безразлично, употребляется наилучшая политика или нет. В частности, эта простая политика поиска приемлема для постановки на вычислительные машины.

5. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Возьмем на прямой отрезок $[0, L]$ и разделим его на две части в отношении $(\sqrt{5} + 1)/2$. Греки считали, что прямоугольник с таким отношением сторон имеет наиболее приятные пропорции, и часто использовали его в своей архитектуре.

6. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ определена на дискретном множестве точек. В этом случае мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $y = f(x)$ — унимодальная функция, определенная на дискретном множестве, содержа-

щем H_n точек. Пусть H_n — целое число такое, что максимальное значение функции $f(x)$ может быть всегда найдено с помощью вычисления $f(x)$ в n точках и сравнения этих значений. Пусть

$$K_n = \max H_n, \quad (4.13)$$

тогда

$$K_n = -1 \div F_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (4.14)$$

Доказательство. Перенумеруем точки в некотором порядке числами $1, 2, \dots, H_n$. Прежде всего ясно, что $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 4$. Возьмем теперь $n > 3$ и предположим, что для $k < n$ мы имеем:

$$K_k = -1 \div K_{k+1}.$$

Вычислим $f(x)$ в точках x_1 и x_2 . Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$x_1 \leq K_{n-2} \div 1, \quad H_n - x_1 \leq K_{n-1}, \quad (4.15)$$

откуда

$$\begin{aligned} H_n &\leq K_{n-2} \div 1 \div K_{n-1} = (F_{n-1} - 1) \div 1 \div (F_n - 1) = \\ &= F_{n+1} \div 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Это максимальное значение достигается, если $x_1 = F_{n-1}$ и $x_2 = F_n$. Таким образом, мы доказали теорему 2 и получили оптимальную полигику поиска.

7. НУЛИ ФУНКЦИЙ

Интересно исследовать, применимы ли подобные идеи для построения метода поиска нуля функции на некотором интервале, если известно, что она монотонно убывает на этом интервале. Оказывается, что для того, чтобы корректно сформулировать эту задачу, необходима дополнительная информация.

Обратимся к следующей задаче.

«Пусть $f(x)$ — непрерывная выпуклая функция на интервале $[0, L]$. Ничего более относительно $f(x)$ не известно. Однако она может быть вычислена в любой точке. Пусть также $f(0) > 0$, $f(L) < 0$.

Фиксируем целое число $n > 0$. Как с наибольшей точностью определить корень функции $f(x)$ в интервале $(0, L)$

за n шагов, если каждый шаг состоит в вычислении значения функции $f(x)$ в любой выбранной точке и сравнении этого значения с ранее полученными?»

8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уточним задачу, сформулировав ее следующим образом. Минимизировать максимальную длину интервала, относительно которого после n последовательных наблюдений можно утверждать, что он содержит нуль.

Не ограничивая общности, всегда можно рассматривать кривую вида, изображенного на рис. 55. Здесь $f(0)=1$, $f(1)=-Y$, $Y>0$. Так как функция f выпукла, ее нуль должен находиться в промежутке $[0, W]$, где $W=1/(1+Y)$. Если мы можем сделать ровно одно наблюдение ($n=1$), мы выбираем точку x из $(0, W)$ и вычисляем $f(x)$. Ниже мы покажем, как оптимальным образом выбрать x .

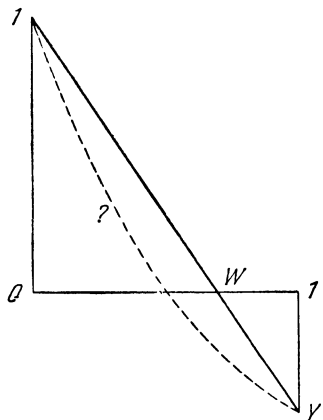


Рис. 55.

Из простых соображений можно заключить, что не имеет смысла наблюдать f вне интервала, внутри которого находится нуль функции.

Выбрав x и вычислив $f(x)$, мы имеем один из следующих случаев. (Случай, когда $f(x)=0$, конечно, наилучший из возможных.)

Случай 1. Если $f(x)=v>0$, то, соединяя прямой линией известные точки на графике f , получаем вследствие выпуклости функции $f(x)$, что ее корень находится в интервале (S, W') (рис. 56).

Случай 2. Если $f(x)=-v'<0$, то график будет аналогичен изображенному на рис. 57 и корень будет находиться в интервале $(\max(0, S'), W'')$.

Пусть $S''=\max(0, S')$. Если x — последняя испытываемая точка (т. е. $n=1$), то в соответствии с нашей целью она выбирается так, чтобы минимизировать максимально возможное значение величины $\max(W''-S, W'''-S')$.

Прежде чем вдаваться в алгебраические детали решения для $n=1$, рассмотрим общий n -шаговый процесс. В каждом из случаев, показанных на рис. 55, 56, все существенные данные могут быть выражены через элементы основного треугольника, зависящие от двух параметров, следующим образом.

Обращаясь к рис. 56, мы можем заключить, что график f лежит выше отрезка vS и ниже отрезка $vW'Y$ (здесь точки

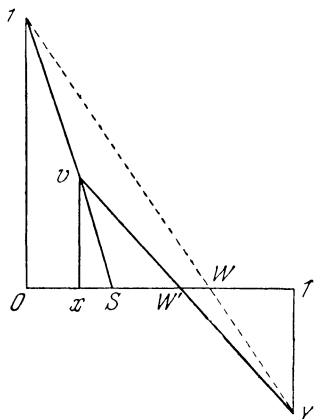


Рис. 56.

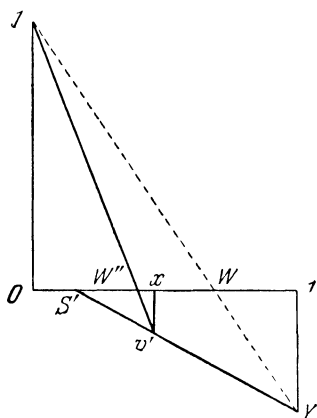


Рис. 57.

и значения x и $f(x)$ обозначены одинаковыми буквами). Проведем теперь отрезок SY ; он может пересекать, а может и не пересекать кривую $y=f(x)$, но если он пересекает кривую в некоторой точке, например в точке P , то мы можем, не теряя никакой информации, заменить дугу кривой, лежащую ниже PY , на PY . Этот прием не нарушает условия выпуклости и включает худший из возможных случаев, что можно показать, исходя из простых соображений, основанных на наших сведениях о значениях функции на каждом шаге.

Таким образом, все существенные данные могут быть выражены через элементы треугольника vSY . Так как задача инвариантна относительно изменения масштабов по горизонтали и вертикали, треугольник vSY можно заменить стандартным треугольником, определенным двумя параметрами Y и S , как показано на рис. 58.

Аналогично во втором случае (рис. 57) график f лежит выше $S'v'$ и ниже $IW''v'$. Проведем отрезок прямой между I и S' и заменим часть графика функции f , лежащую ниже этой линии, отрезком прямой от I до точки пересечения. Это не повлияет на выбор следующих значений x , так как все эти значения должны быть выбраны из минимальных интервалов, содержащих корень функции, что очевидно. Таким образом, во втором случае после соответствующего изменения масштаба мы приходим к другому представлению, показанному на рис. 58.

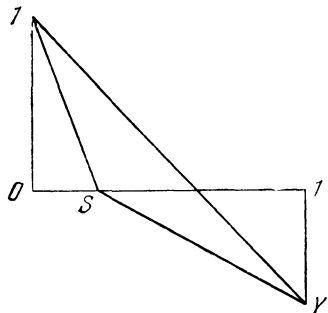


Рис. 58.

Определим теперь функцию двух переменных S и Y .

$R_n(S, Y)$ — минимальная длина интервала, на котором мы можем гарантировать наличие нуля любой выпуклой функции f , заданной на интервале $[0, 1]$, причем $f(0) = 1$, $f(1) = -Y < 0$, если известно, что корень больше S и мы должны вычислить функцию в n точках. (4.17)

Если $n = 0$, то мы, очевидно, имеем:

$$R_0(S, Y) = \frac{1}{1+Y} - S. \quad (4.18)$$

Далее, используя принцип оптимальности и учитывая изменения масштаба, получаем при $n > 0$ рекуррентное соотношение

$$R_n(S, Y) = \min_{S \leq x \leq \frac{1}{1+Y}} \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{0 \leq v' \leq \frac{Y(x-S)}{1-S}} x R_{n-1} \left(\frac{xy - v'}{x(y-v')}, v' \right), \\ \max_{0 \leq v < 1-x(1+Y)} (1-x) \times \\ \times R_{n-1} \left(\frac{x}{1-x}, \frac{v}{1-v}, \frac{y}{v} \right). \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Верхнее и нижнее выражения в фигурных скобках относятся соответственно ко второму и первому случаям. Изменение масштаба производится элементарным образом из подобия треугольников.

Области изменения переменных S, Y соответственно будут $Y \geq 0, 0 < S < 1/(1+Y)$.

Чтобы привести выражение (4.19) к виду, удобному для вычислений на машине Джонниак, была сделана следующая замена переменных:

$$W = \frac{1}{1+Y}, \quad \varphi_n(S, W) = R_n(S, Y), \quad (4.20)$$

откуда

$$R_n(S, Y) = \varphi_n\left(S, \frac{1}{1+Y}\right).$$

Дополнительная замена переменных v и v' сводит систему к следующей:

$$\varphi_0(S, W) = W - S,$$

$$\varphi_n(S, W) = \min_{S \leq x \leq W} \max \left\{ \begin{array}{l} x \max_{S \leq t \leq x} \varphi_{n-1}\left(\frac{t}{x}, \frac{W(1-t)}{W(1-x) + x - t}\right) \\ (1-x) \max_{x \leq t' \leq W} \varphi_{n-1}\left(\frac{t'-x}{1-x}, \frac{W(t'-x)}{t' - Wx}\right) \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

где $0 \leq S \leq W \leq 1$.

Затем функции $\varphi_n(S, W)$ были вычислены для $n=1, 2, 3, 4$ с помощью дискретной аппроксимации с различными сетками и линейной интерполяции.

Минимизирующие значения x запоминались, так как они составляют основу нашей оптимальной политики, т. е. $x^* = x^*(S, W)$ есть точка, в которой мы вычисляем неизвестную функцию f , если известно, что корень лежит в интервале (S, W) нашего основного треугольника и делается n вычислений нашей функции. Точка x^* , конечно, сама находится в основном треугольнике. Чтобы сохранить общность, мы должны отнести наши выкладки к исходному масштабу. Если $\rho_n(S, Y)$ обозначает отношение, в котором точка x^* делит расстояние между S и W , то, очевидно,

$$\rho_n(S, Y) = \frac{x_n^*(S, W) - S}{W - S},$$

где $W = 1/(1 + Y)$. Теперь легко вычислить положение x_n^* в исходном масштабе и, таким образом, получить один цикл процесса, который мы коротко опишем ниже.

Графики функций $R_n(0, Y)$ и $\rho_n(0, Y)$ для $n = 1, 2, 3, 4$ читатель найдет ниже (рис. 59, 60).

9. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $n = 1$

Мы начнем настоящий параграф с нескольких замечаний, имеющих целью прежде всего оправдание некоторых из предположений, явно или неявно сделанных при выводе написанных выше функциональных уравнений.

Мы закончим настоящий параграф краткими пояснениями относительно частного случая $n = 1$, $S = 0$, который может служить прекрасной проверкой правильности расчетов, проведенных на машине Джонниак. Итак, переходим к замечаниям.

1. Предположим, что мы находимся на некоторой стадии оптимального последовательного минимаксного поиска; нам известны значения функции f в нескольких точках, и мы должны указать следующую точку. Пусть a и b обозначают ближайшие точки, соответственно справа и слева от минимального интервала (S, W) , который, как нам известно, содержит корень. Тогда при оптимальной процедуре x выбирается из интервала (a, b) . Чтобы убедиться в этом, нам нужно только показать, что так как неизвестная функция f может быть кусочно-линейной (одна из возможностей) вне (a, b) , то, очевидно, любое следующее ее вычисление в этой области не добавляет никакой информации относительно характера поведения f внутри (a, b) , касающейся расположения ее корня, кроме информации, уже данной величинами $a, b, f(a), f(b), S$ и W или любым из предыдущих вычислений. Аналогичными рассуждениями можно показать, что дальнейшие вычисления следует производить в интервале (S, W) .

2. При рассмотрении случая 2 молчаливо предполагалось, что $Y_x < Y$ или, иначе говоря, что прямая SU имеет отрицательный наклон, как показано на рисунке. Снова на основании некоторых простых соображений можно показать, что наихудшая ситуация будет в случае, когда f монотонна, т. е. когда график f лежит выше прямой SU . Именно этим условием определяются границы переменной v в верхней строке

функционального уравнения для R_n . Точно такие же соображения позволяют нам привести функциональное уравнение к довольно простому виду и, таким образом, с помощью рекуррентных вычислений найти оптимальную «политику». Но тем не менее эти соображения не дают возможности получить оптимальную процедуру непосредственно из уравнения.

3. По-видимому, функциональное уравнение для R_n может быть существенно упрощено, если мы предположим, что максимум в верхней строке уравнения всегда достигается на правом конце интервала изменения $R_n(SY)$. При $n=1$ это справедливо. Однако для общего случая это утверждение не доказано и преобразованное уравнение для Φ_n было поставлено на Джонниак в его настоящем виде. Результаты вычислений подтвердили правильность высказанного предположения.

4. $R_n(S, Y)$ — невозрастающая функция по каждой из переменных S и Y в отдельности. Чтобы убедиться в этом, например, для первой переменной S , замечаем, что по определению $R_n(S, Y)$ при прочих равных условиях информация о том, что корень больше S' , содержится в информации о том, что он больше S , если $S' < S$. Тогда на основе дополнительной информации при оптимальной процедуре мы гарантируем, что чем больше S , тем короче окончательный интервал, т. е. $R_n(S, Y) \leq R_n(S', Y)$, если $S > S'$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $R_n(S, Y)$ не возрастает и по Y .

10. СЛУЧАЙ $n=1$, $S=0$

Теперь мы вкратце изложим некоторые результаты, полученные для случая $n=1$, $S=0$. Мы избавим читателя от элементарных, хотя и громоздких алгебраических выкладок, а просто скажем, что определение $R_1(0, Y)$ сводится к подстановке

$$R_0(S, Y) = \frac{1}{1+Y} - S$$

в правую часть функционального уравнения, что при $S=0$ дает относительно простую алгебраическую минимаксную задачу.

Подстановка $p = x(1+Y)$ при взятии минимакса дает следующее уравнение для оптимального значения отношения p

и переменной Y :

$$(\rho^4 - 2\rho^3 - 5\rho^2 - 2\rho + 1)Y^2 + 2(2\rho^3 - \rho^2 - 3\rho + 1)Y + (2\rho - 1)^2 = 0 \quad (4.22)$$

при ограничениях $Y > 0$, $0 \leq \rho \leq 1$.

Так как дискриминант этого квадратного уравнения относительно Y равен $8\rho^3$, мы легко получаем следующую рациональную параметризацию кривой зависимости ρ и Y :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(1-t)^2, \\ Y &= \frac{4t^2}{1-4t-t^4}, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq t_0. \quad (4.23)$$

Чтобы определить значение t_0 , заметим, что при $Y \rightarrow \infty$ предельное полиномиальное уравнение получается, если приравнять к нулю старший коэффициент:

$$\rho^4 - 2\rho^3 - 5\rho^2 - 2\rho + 1 = 0. \quad (4.24)$$

Это уравнение в интервале $(0, 1)$ имеет единственный корень, равный

$$\rho_1^* = \frac{1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}}{2} \approx 0,282. \quad (4.25)$$

Из параметрического представления ρ получаем, что

$$t_0 = 1 - \sqrt{2\rho} \approx 0,250.$$

Для контроля этого результата заметим, что значение t_0 является наименьшим положительным корнем знаменателя в параметрическом выражении для Y .

Графики $R_1(0, Y)$ и $\rho_1(Y)$, полученные в результате ручного счета по приведенным формулам, хорошо согласуются с результатами, полученными на Джонниак. К сожалению, однако, выбор недостаточно мелкой сетки из-за ограниченности памяти Джонниак порождает накопленную ошибку, которая вызывает постепенное смещение вверх на концах кривой ρ . Это обстоятельство учтено, и приводимый здесь график согласуется с теорией. К счастью, кривая R оказалась совершенно нечувствительной к выбору шага сетки.

Заметим, что дополнительную проверку вычислений можно провести при помощи легко получающихся соотношений

$$\varphi_n(W, W) = 0, \quad \varphi_n(S, 1) = \frac{1-S}{2^n},$$

которые оказались очень хорошо согласующимися с данными, полученными на машине Джонниак.

11. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Опишем теперь один цикл вычислительной процедуры. Пусть нам известно, что $f(a) = Y_a > 0$, $f(b) = -Y_b$, $Y_b > 0$, где $a < b$, корень больше S , и мы можем сделать еще n вычислений функции. Тогда мы можем утверждать, что корень находится в интервале (S, W) , где

$$W = a + (b - a) \frac{Y_a}{Y_a + Y_b}.$$

Если $n = 0$, вычисления прекращаются и выписываются значения S, W .

Если $n > 0$, вычисляется значение функции $f(x)$ при $x = S + (W - S) \rho_n\left(\frac{Y_b}{Y_a}\right)$. Затем, если $f(x) = Y_x > 0$, полагаем $a' = x$, $b' = b$ и $S' = x + (x - a) \frac{Y_x}{Y_a - Y_x}$. Если же $f(x) = -Y_x < 0$, полагаем $a' = a$, $b' = x$ и, если $Y_x > Y_b$, полагаем $S' = S$, в противном случае

$$S' = \max\left(S, x - (b - x) \frac{Y_x}{Y_b - Y_x}\right).$$

Наконец, полагаем $n' = n - 1$.

Теперь мы снова имеем ситуацию, когда известно, что

$$f(a') = Y_{a'} > 0, \quad f(b') = -Y_{b'}, \quad Y_{b'} > 0, \quad \text{где } a' < b',$$

что корень больше S' , и можно сделать еще n' вычислений.

На этом заканчивается цикл вычислений (первоначально $S = a$).

В следующем параграфе мы на частном примере проиллюстрируем действие этой схемы.

Замечание. Приведенная процедура служит аппроксимацией действительной минимаксной процедуры. Теоретически

корректная процедура вместо выражения $\rho_n\left(\frac{Y_b}{Y_a}\right)$ в формуле для x включала бы $\rho_n\left(\frac{S-a}{b-a}, \frac{Y_b}{Y_a}\right)$, функция $\rho_n(S, Y)$ определена выше. Так как окончательная функция мало чувствительна к величине S при выборе $\rho_n(S, Y)$ в окрестности минимакса, приближение

$$\rho_n(0, Y) \approx \rho_n(S, Y)$$

вполне оправдывается, и мы полагаем $\rho_n(Y) \equiv \rho_n(0, Y)$. Эта аппроксимация сводит задачу к более удобной для машинного счета формуле.

12. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР — СРАВНЕНИЕ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Предположим, что нам желательно выделить интервал, содержащий нуль некоторой сложно вычисляемой функции f , определенной на интервале $(0, 1)$. Нам известно, что f непрерывна, выпукла и что $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Однако, так как для получения значения этой гипотетической функции в одной точке требуется час машинного времени, мы игнорируем тот факт, что на самом деле в нашем примере она задается сравнительно безобидным выражением

$$f(x) = \max\left(-1, \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)\right).$$

Пусть мы можем сделать три вычисления функции $f(x)$. Обращаясь к графику $R_3(0, Y)$ при $Y = \frac{Y_0}{Y_1} = 1$, мы видим, что можно найти интервал, содержащий корень и составляющий 0,01 длины первоначального интервала, т. е. интервал длины 0,01. Однако, так как график представляет наихудший из возможных случаев, можно ожидать, что мы получим гораздо большую точность, как и оказывается на самом деле.

Перейдем к вычислениям.

Цикл 1. $a = 0$, $b = 1$, $Y_a = 1$, $Y_b = 1$, $S = 0$, $n = 3$, откуда по нашей формуле $W = 0,5$, и мы локализовали корень на интервале $(0, 0,5)$. Далее, $x = 0 + (0,5 - 0)\rho_3(1) = 0,5 \cdot 0,148 = 0,074$, и находим, что $f(0,074) = 0,76839 > 0$,

так что $a' = 0,074$, $b' = 1$,

$$S' = 0,074 + \frac{0,074 \cdot 0,76839}{1 - 0,76839} = 0,31950.$$

Наконец $n' = 2$.

Цикл 2. (Опускаем штрихи в обозначениях.) $a = 0,074$,
 $b = 1$, $Y_a = 0,76839$, $Y_b = 1$, $S = 0,31950$, $n = 2$,

откуда по нашей формуле $W = 0,074 + \frac{0,926 \cdot 0,76839}{1,76839} =$
 $= 0,47636$, и корень находится в интервале $(0,31950, 0,47636)$.
 Далее

$$x = 0,31950 + 0,15686 p_2 \left(\frac{1}{0,76839} \right) = 0,31950 + 0,15686 \times$$

$$\times 0,198 = 0,35066,$$

и мы находим, что $f(0,35066) = -0,04795 < 0$, так что
 $a' = 0,074$, $b' = 0,35066$ и так как $Y_x < Y_b$,

$$S' = \max(0,31950, 0,35066 - \frac{(1 - 0,35066)(0,04795)}{1 - 0,04795}) = 0,31950.$$

Наконец, $n' = 1$.

Цикл 3. $a = 0,074$, $b = 0,35066$, $Y_a = 0,76839$, $Y_b =$
 $= 0,04795$, $S = 0,31950$, $n = 1$, откуда по нашей формуле
 $W = 0,074 + \frac{(0,35066 - 0,074) \cdot 0,76839}{0,76839 + 0,04795} = 0,33441$, и корень на-
 ходится в интервале $(0,31950, 0,33441)$. Далее $x = 0,31950 +$
 $+ (0,33441 - 0,31950) p_1 \left(\frac{0,04795}{0,76839} \right) = 0,31950 + 0,01491 \times$
 $\times p_1(0,624) = 0,32440$, и мы имеем, что $f(0,32440) = 0,02535 >$
 > 0 , так что $a' = 0,32440$, $b' = 0,35066$, $S' = 0,32440 +$
 $+ \frac{(0,32440 - 0,074) \cdot 0,02535}{0,76839 - 0,02535} = 0,33294$.

Цикл 4. $a = 0,32440$, $b = 0,35066$, $Y_a = 0,02535$, $Y_b =$
 $= 0,04795$, $S = 0,33294$, $n = 0$; следовательно, по формуле

$$W = 0,32440 + \frac{(0,35066 - 0,32440) \cdot 0,02535}{0,02535 + 0,04795} = 0,33348,$$

и корень находится в интервале $(0,33294, 0,33348)$. Так как
 $n = 0$, вычисления прекращаются.

13. ОБСУЖДЕНИЕ

Так как метод нахождения корня путем деления промежутка не требует выпуклости функции, еще до начала вычислений ясно, что корень лежит на интервале $(0, 1)$, после первого измерения — на интервале $(0, 0,5)$, после двух вычислений — на интервале $(0,25, 0,5)$ и, наконец, после третьего — на интервале $(0,25, 0,375)$. Длины этих интервалов

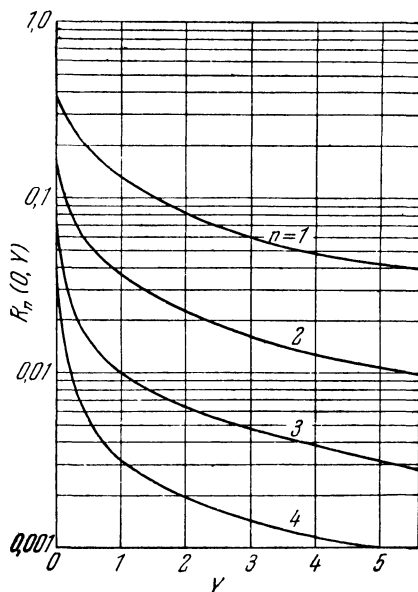


Рис. 59.

соответственно равны 1, 0,5, 0,25, 0,125. Сравнивая эти числа с полученными выше 0,5, 0,15686, 0,01491, 0,00054, мы видим на этом примере, что наш метод имеет существенные преимущества. В действительности для выпуклой функции с теми же исходными значениями, что и в нашем примере, мы можем гарантировать, что при трех вычислениях мы получим интервал длины не более чем 0,01, как уже говорили. Сравнение этого числа с 0,125 показывает преимущество нашего метода (см. рис. 59 и 60).

14. ЗАДАЧА О ФАЛЬШИВОЙ МОНЕТЕ

Широко известна следующая задача.

Среди N монет одинакового внешнего вида имеется одна фальшивая. Найти минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь, достаточное для выделения этой фальшивой монеты.

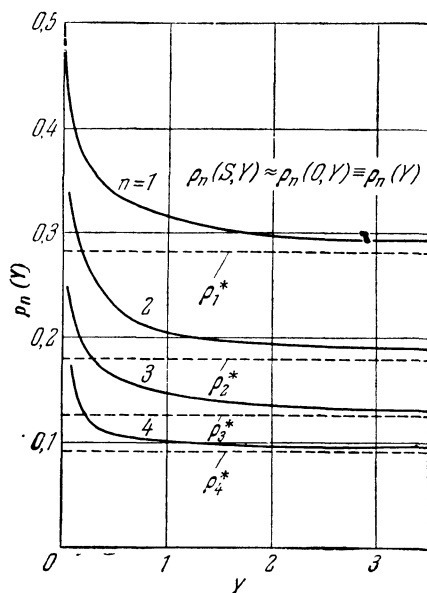


Рис. 60.

Существует много остроумных решений этой задачи, в том числе и имеющих в основе секвенциальные*) процедуры.

Весьма странно, что эта задача в случае двух или более фальшивых монет не привлекла достаточного внимания. Значение же ее велико, так как оно представляет собой один из простейших примеров секвенциальных задач испытания. Кроме того, эта задача насыщена как комбинаторными

*) См. примечание на стр. 21. (Прим. ред.)

трудностями, так и трудностями, неизбежно связанными с понятием «информации».

Даже поверхностный анализ вскрывает громадную разницу в уровне сложности задач с одной и двумя монетами. Если мы имеем N монет, среди которых, как нам известно, имеется одна фальшивая, и чашечные весы без гирь, то единственная возможная операция состоит во взвешивании двух групп по k монет, выбранных из наших N монет. Если эти группы уравниваются, мы заключаем, что фальшивая монета находится среди оставшихся $N - 2k$ монет. Если же они не уравниваются, то фальшивая монета находится в одной из этих групп. В простейшем случае, когда нам известно, что фальшивая монета тяжелее подлинной, независимо от исхода первого испытания, мы оказываемся в первоначальной ситуации с меньшим числом монет. Эта инвариантность позволяет нам довольно просто применить для решения этой задачи динамическое программирование.

Если имеются две или более фальшивых монет, задача становится гораздо более сложной, так как после испытания мы не можем сделать столь определенного вывода.

В следующем параграфе мы детально исследуем этот случай. Нашей целью будет выработать систематический метод применения динамического программирования для нахождения численного решения, определяющего оптимальную и субоптимальную политику испытаний. Для иллюстрации мы приведем несколько численных результатов, полученных на быстродействующей машине.

15. ЗАДАЧА С ДВУМЯ МОНЕТАМИ

Перейдем к рассмотрению случая, когда среди N монет имеются две фальшивые и известно, что фальшивая монета тяжелее обычной. Рассмотрим возможности, которые могут представиться при одном взвешивании двух наборов по k монет.

Если эти наборы уравниваются, то либо в каждом из них имеется по фальшивой монете, тогда в группе оставшихся $N - 2k$ монет нет фальшивых, либо ни в одной из этих групп нет фальшивой монеты и обе они находятся среди оставшихся $N - 2k$ монет.

Если два набора по k монет не уравниваются, то либо один из них содержит фальшивую монету, тогда другая

находится среди оставшихся $N - 2k$ монет, либо один из наборов содержит обе фальшивые монеты и среди оставшихся монет нет фальшивых.

Мы видим, что исходная информация разветвляется. При продолжении испытаний, если мы будем считать допустимой любую возможную программу испытаний, это разветвление разрастается с угрожающей скоростью. Заметим, что множество возможных испытаний гораздо шире, чем в простейшем случае с одной фальшивой монетой.

После первого взвешивания мы могли бы выделить из каждой из трех групп по k , k и $N - 2k$ монет некоторые подмножества и затем сравнить этот набор с аналогичным набором. Хотя большинство таких испытаний неэффективно и мажорируется более простыми политиками, нелегко определить условия, которые вычеркивали бы такие испытания из числа допустимых, не приводя при этом к чрезмерной громоздкости. Кроме того, априори не ясно, почему некоторые из подобных испытаний не могут оказаться полезными.

Далее, однако, чтобы упростить исследование и ускорить вычисления, мы не будем допускать смешанных испытаний, подобных описанному выше. Мы будем предполагать, что информация, полученная при испытании какой-либо группы монет, может быть использована при опытах над другими группами.

16. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Из сказанного выше следует, что независимо от того, какой информацией мы располагаем перед взвешиванием и каков результат отдельного взвешивания, мы оказываемся перед лицом нескольких альтернатив. Допустим с самого начала, что нам задано начальное распределение вероятностей $p = [p_0, p_1, p_2]$, где p_i — вероятность того, что в наборе из N монет имеется точно i фальшивых, $i = 0, 1, 2$. Допуская, что эти фальшивые монеты распределены равномерно среди N монет, мы можем непосредственно вычислить соответствующие вероятности для любой группы по k монет, взятой из основного набора.

Мы будем рассматривать только политики следующего типа. Из данного набора в N монет, с которым связано вероятностное распределение $p = [p_0, p_1, p_2]$, случайным

образом выбираются две группы по k монет и кладутся на разные чашки весов. Если они уравниваются (это означает, что в каждой из этих групп не более одной фальшивой монеты), то исследуется одна из этих групп. Если в ней нет фальшивой монеты, то другая группа из k монет также состоит из правильных монет, а остается исследовать группу из $N - 2k$ монет. Если в первой группе найдена фальшивая монета, то вторая должна находиться в другой группе из k монет и нет надобности исследовать $N - 2k$ оставшихся монет.

Если две первоначальные группы не уравниваются, переходим к поискам фальшивой монеты в более тяжелой группе. Если в ней обнаружится одна фальшивая монета, то вторая группа не имеет фальшивых монет и мы переходим к поискам второй фальшивой монеты среди $N - 2k$ монет.

Если в первой группе обнаружатся две фальшивые монеты, нет надобности исследовать остальные группы.

Прежде чем выписывать функциональное уравнение, которое мы используем для нахождения оптимального значения k , введем следующие обозначения:

$f_N(p_0, p_1, p_2)$ — ожидаемое число взвешиваний, требуемых для нахождения всех фальшивых монет среди N монет при использовании оптимальной политики и заданных p_0, p_1, p_2 ;

$q_N(p_0, p_1; k)$ — вероятность того, что две группы по k монет уравниваются;

$P_B(0)$ — вероятность того, что среди взвешиваемых групп нет фальшивых монет, при условии, что группы уравнивались;

$P_B(1)$ — вероятность того, что в каждой из групп по k монет имеется по одной фальшивой, при условии, что группы уравнивались;

$P_U(1)$ — вероятность того, что в одной из первоначальных групп из k монет имеется одна фальшивая, а в другой нет фальшивых, если известно, что группы не уравнивались;

$P_U(2)$ — вероятность того, что в одной группе две фальшивые монеты, а в другой — ни одной, при условии, что группы не уравнивались;

$p(r; s; t)$ — вероятность того, что в первой группе из k монет имеется r фальшивых, во второй группе из k монет

имеется s фальшивых, а среди остальных $N - 2k$ монет, не подвергавшихся взвешиванию, t фальшивых;

$$\begin{aligned} f_N(0, p_1, p_2) &\equiv g_N(0, p_1, p_2) \equiv g_N(p_1, p_2) \equiv g_N(p_1), \\ f_N(p_0, p_1, 0) &\equiv h_N(p_0, p_1, 0) \equiv h_N(p_0, p_1) \equiv h_N(p_0), \\ f_N(0, 1, 0) &\equiv d_N(0, 1, 0) \equiv d_N. \end{aligned}$$

17. ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $p(r; s; t)$

Для получения основного рекуррентного соотношения полезно составить таблицы значений функции $p(r; s; t)$

$$\left. \begin{aligned} p(1; 1; 0) &= \frac{2k^2}{N(N-1)} p_2, \\ p(1; 0; 1) &= \frac{2k(N-2k)}{N(N-1)} p_2, \\ p(0; 1; 1) &= \frac{1k(N-2k)}{N(N-1)}, \\ p(2; 0; 0) &= \frac{k(k-1)}{N(N-1)} p_2, \\ p(0; 2; 0) &= \frac{k(k-1)}{N(N-1)} p_2, \\ p(0; 0; 2) &= \frac{(N-2k)(N-2k-1)}{N(N-1)} p_2, \\ p(0; 1; 0) &= \frac{k}{N} p_1, \\ p(1; 0; 0) &= \frac{k}{N} p_1, \\ p(0; 0; 1) &= \frac{N-2k}{N} p_0, \\ p(0; 0; 0) &= p_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

18. ОСНОВНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Применяя обычным образом принцип оптимальности, получаем основное уравнение для нахождения политики

$$\begin{aligned} f_N(p_0, p_1, p_2) &= \min_k \{ 1 + q_N(p_0, p_1; k) [h_k(p_0^{(1)}) + \\ &\quad + P_B(0) f_{N-2k}(p_0^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) + P_B(1) d_k] + \\ &\quad + (1 - q_N(p_0, p_1; k)) [q_k(p_1^{(3)}) + P_U(1) h_{N-2k}(p_0^{(4)})] \}, \quad (4.27) \end{aligned}$$

где $p_i^{(j)}$ — условные вероятности при различных возможных результатах взвешивания двух групп по k монет и

$$\sum_i p_i^{(j)} = 1 \text{ при всех } j. \quad (4.28)$$

Верхний индекс (1) соответствует уравниванию двух групп по k монет. Верхний индекс (2) соответствует случаю, когда известно, что фальшивые монеты находятся среди $N - 2k$ монет. Индекс (3) относится к случаю, когда начальные группы по k монет не уравниваются и (4) — к предпоследнему из случаев, описанных в § 16.

Величины $p_i^{(j)}$ задаются выражениями

$$\left. \begin{aligned} p_0^{(1)} &= \left[p_0 + p_2 \frac{(N-2k)(N-2k-1)}{N(N-1)} \right] / \left[p_0 + \right. \\ &\quad \left. + p_2 \left\{ \frac{(N-2k)(N-2k-1) + 2k^2}{N(N-1)} \right\} \right], \\ p_1^{(1)} &= 1 - p_0^{(1)}, \\ p_0^{(2)} &= p_0 / \left[p_0 + p_1 \left(\frac{N-2k}{N} \right) + p_2 \frac{(N-2k)(N-2k-1)}{N(N-1)} \right], \\ p_1^{(2)} &= p_1 \left(\frac{N-2k}{N} \right) / \left[p_0 + p_1 \left(\frac{N-2k}{N} \right) + \right. \\ &\quad \left. + p_2 \frac{(N-2k)(N-2k-1)}{N(N-1)} \right], \\ p_2^{(2)} &= 1 - p_0^{(2)} - p_1^{(2)}, \\ p_0^{(3)} &= 0, \\ p_1^{(3)} &= \left[p_1 \frac{2k}{N} + p_2 \frac{4k(N-2k)}{N(N-1)} \right] / \left[p_1 \frac{2k}{N} + \right. \\ &\quad \left. + p_2 \left\{ \frac{4k(N-2k) + 2k(k-1)}{N(N-1)} \right\} \right], \\ p_2^{(3)} &= p_2 \frac{2k(k-1)}{N(N-1)} / \left[p_1 \frac{2k}{N} + p_2 \left\{ \frac{4k(N-2k) + 2k(k-1)}{N(N-1)} \right\} \right], \\ p_0^{(4)} &= p_1 \frac{2k}{N} / \left[p_1 \frac{2k}{N} + p_2 \frac{4k(N-2k)}{N(N-1)} \right], \\ p_1^{(4)} &= 1 - p_0^{(4)}, \\ p_2^{(4)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Также

$$q_N(p_0, p_1; k) = p_0 + p_1 \frac{(N-2k)}{N} + \\ + p_2 \left[\frac{(N-2k)(N-2k-1) + 2k^2}{N(N-1)} \right] \quad (4.30)$$

и

$$\left. \begin{aligned} P_B(0) &= p_0^{(1)}, \\ P_B(1) &= p_1^{(1)}, \\ P_U(1) &= p_1 \frac{2k}{N} + p_2 \frac{4k(N-2k)}{N(N-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Уравнения для d_N , $h_N(p_0)$ и $g_N(p_1)$ являются частными случаями уравнения (4.27), именно

$$\left. \begin{aligned} d_N &= \min_k \left[1 + \frac{N-2k}{N} d_{N-2k} + \frac{2k}{N} d_k \right], \\ h_N(p_0) &= \min_k \left[1 + q_N(p_0, 1-p_0; k) h_{N-2k}(p_0^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - q_k(p_0, 1-p_0; k)) d_k \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

и

$$\begin{aligned} g_N(p_1) &= \min_k \{ 1 + q_N(0, p_1; k) [h_k(p_0^{(1)}) + P_B(0) g_{N-2k}(p_1^{(2)}) + \\ &\quad + P_B(1) d_k] + (1 - q_N(0, p_1; k)) [g_k(p_1^{(3)}) + P_U(1) h_{N-2k}(p_0^{(4)})] \}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

19. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ

С помощью уравнений (4.27), (4.32) и (4.33) были получены приближенные значения для f_N и минимизирующие значения k для $N=1, 2, \dots, 99$ и значений p_i , взятых с точностью до 0,1. Вычисления проводились итеративным методом на машине Унивак 1105. Ограниченность объема памяти вычислительных машин, размерность задачи и ограниченность машинного времени сделали несовершенным метод вычисления, так что полученные результаты дают только приближенное представление о природе точного решения. Однако некоторые выводы все же можно сделать. Тот же метод позволит нам получить более точные решения при более точных значениях p_i , когда появятся машины с большим объемом памяти.

Несовершенство результатов имеет ту причину, что сами $p_i^{(j)}$ принимают континуум значений в интервале $(0, 1)$ при различных значениях p_0, p_1, p_2, k и N . Иначе говоря, $p_i^{(j)}$, вычисленные с помощью уравнения (18.3), не равны точно 0,0; 0,1; 0,2; ...; 0,9 или 1,0, а принимают промежуточные

значения, для которых приближенные функциональные выражения $f_r(p_0^{(j)}, p_1^{(j)}, p_2^{(j)})$ следует искать интерполяцией из первоначально полученных выражений для функций $f_r(p'_0, p'_1, p'_2)$, где p'_0, p'_1, p'_2 принимают значения 0,0; 0,1; ...; 0,9; 1,0.

Эти одиннадцать величин мы далее будем именовать множеством P и обозначать через $p_i^{(j)}$ и $\bar{p}_i^{(j)}$ последовательные элементы этого множества, между которыми лежит $p_i^{(j)}$.

В том случае, когда $\bar{p}_0^{(j)} + \bar{p}_1^{(j)} \geq 1$, интерполяционная формула для $f_r(p_0^{(j)}, p_1^{(j)})$ (здесь $p_2^{(j)}$ опущено, так как $p_0^{(j)} + p_1^{(j)} + p_2^{(j)} = 1$) имеет вид

$$f_r(p_0, p_1) = 0,01(p_0 - \underline{p}_0)f_r(\underline{p}_0, \bar{p}_1) + (\bar{p}_0 - p_0)f_r(\bar{p}_0, \bar{p}_1)(p_1 - \bar{p}_1) + + 0,01(p_0 - \bar{p}_0)f_r(\bar{p}_0, \underline{p}_1) + (\bar{p}_0 - p_0)f_r(\underline{p}_0, \underline{p}_1)(\bar{p}_1 - p_1). \quad (4.34)$$

Когда $\bar{p}_0^{(j)} + \bar{p}_1^{(j)} \equiv 1,1$, интерполяционную формулу следует изменить, оставив только $f_r(p_0, \bar{p}_1)$, $f_r(\bar{p}_0, p_1)$ и $f_r(\bar{p}_0, p_1)$. Очевидно, что приращение 0,1 велико, что порождает неточность вычислений. Однако тот факт, что для получения f_N все величины $f_r(p_0, p_1)$, $r < N$ должны храниться в памяти, делает невозможными вычисления с меньшим интервалом. Интуитивные соображения подсказывают также, что функции f и соответствующие им минимизирующие значения (будем обозначать их через k_N) должны быть разрывны на границах $p_1^{(j)} = 1$ и $p_0^{(j)} + p_1^{(j)} = 1$, что снова является препятствием к использованию интерполяционных формул.

Так как количество вычисленных значений $f_N(p_0, p_1)$ превышает 6000, то печатающее устройство не может выдать полностью как эти значения, так и соответствующие значения k_N . В качестве примера полученных данных мы помещаем таблицы 4.1—4.4, вычисленные для $N=80$ и 90.

Из этих результатов очевидно следующее:

$$\left. \begin{aligned} (a) f_N(0, 0, 1) &= \log_2 N, \\ (b) f_N(0, 0, 1) &= \max f_N(p_0, p_1, p_2), \\ (c) \frac{f_N(p_0, p_1, p_2)}{\log_2 N} &\text{стремится к некоторому пределу} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

при $N \rightarrow \infty$ и фиксированных p_0, p_1, p_2 .

Справедливость последнего вывода подтверждается статистическим анализом, проведенным для $N=79 \div 99$. Мы выбрали именно эти значения N для того, чтобы иметь возможность говорить об асимптотике функции и одновременно

иметь достаточно данных для определения тенденции. Для этих значений N и всех $\{p_i\}$ из P были вычислены статистики

$$r_N(p_0, p_1) = \frac{k_N(p_0, p_1)}{N}$$

и

$$S_N(p_0, p_1) = \frac{f_N(p_0, p_1)}{\log_2 N}.$$

Таблица 4.1

Значения k_N для $N=80$

$p_0 \backslash p_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	7	7	7	8	8	8	18	18	40	40	27
0,1	3	7	8	8	10	10	40	40	40	27	
0,2	4	10	10	12	14	40	40	40	29		
0,3	5	8	9	10	40	40	40	40			
0,4	7	7	40	40	40	40	40				
0,5	8	8	40	40	21	40					
0,6	7	38	40	40	40						
0,7	7	38	39	40							
0,8	32	37	39								
0,9	28	37									
1,0	—										

Таблица 4.2

Значения f_N для $N=80$

$p_0 \backslash p_1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	6,447	6,512	6,539	6,535	6,497	6,416	6,283	6,072	5,748	5,143	4,000
0,1	4,674	5,773	6,146	6,309	6,298	6,164	5,928	5,496	4,913	3,927	
0,2	4,534	5,293	5,736	5,988	5,837	5,588	5,204	4,663	3,720		
0,3	4,344	4,920	5,422	5,486	5,243	4,911	4,408	3,450			
0,4	4,056	4,689	5,114	4,890	4,619	4,154	3,100				
0,5	3,781	4,340	4,524	4,272	3,835	2,750					
0,6	3,452	4,058	3,917	3,445	2,400						
0,7	3,160	3,488	3,021	2,050							
0,8	2,706	2,481	1,675								
0,9	1,715	1,315									
1,0	—										

Т а б л и ц а 4.3

Значения k_N для $N=90$

$\begin{matrix} p_1 \\ p_0 \end{matrix}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	7	8	8	9	10	10	10	22	45	45	27
0,1	5	8	10	10	10	10	22	45	45	31	
0,2	5	10	10	10	14	15	45	45	32		
0,3	6	9	9	45	45	45	45	45			
0,4	6	8	9	45	45	45	45				
0,5	9	9	45	45	45	45					
0,6	8	10	44	45	45						
0,7	8	37	44	44							
0,8	36	42	44								
0,9	32	41									
1,0	—										

Т а б л и ц а 4.4

Значения f_N для $N=90$

$\begin{matrix} p_1 \\ p_0 \end{matrix}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	6,591	6,657	6,690	6,687	6,634	6,553	6,432	6,236	5,909	5,272	4,156
0,1	4,770	5,895	6,269	6,437	6,436	6,321	6,103	5,656	5,030	4,068	
0,2	4,664	5,409	5,819	6,085	5,943	5,694	5,343	4,765	3,849		
0,3	4,450	5,034	5,508	5,654	5,396	5,033	4,501	3,520			
0,4	4,153	4,767	5,208	5,004	4,733	4,238	3,160				
0,5	3,867	4,422	4,607	4,371	3,913	2,800					
0,6	3,523	4,134	3,988	3,513	2,440						
0,7	3,217	3,541	3,061	2,053							
0,8	2,747	2,527	1,702								
0,9	1,748	1,320									
1,0	—										

При фиксированных p_i функции $s_N(p_0, p_1)$ почти постоянны относительно N (см. таблицу 4.5). Была вычислена квадратичная регрессия на p_0 и p_1 по средним r_N и s_N (усреднение по N), т. е. по статистикам

$$\left. \begin{aligned} r(p_0, p_1) &= \frac{1}{21} \sum_{N=79}^{99} r_N(p_0, p_1), \\ s(p_0, p_1) &= \frac{1}{21} \sum_{N=79}^{99} s_N(p_0, p_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Эти регрессии равны

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad r &= -1,076 + 6,014p_0 - 0,594p_0^2 + \\ &\quad + 8,350p_1 - 3,431p_1^2, \\ &\quad \sigma_r = 0,956; \\ (b) \quad s &= 1,017 - 0,869p_0 + 0,013p_0^2 + \\ &\quad + 0,388p_1 - 0,764p_1^2, \\ &\quad \sigma_s = 0,070. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Тот факт, что дисперсия в (4.37, b) мала и свободный член близок к единице, позволяет нам заключить, что мы имеем очень точное выражение для регрессии.

Т а б л и ц а 4.5

N	$s_N(0, 0)$	$s_N(0,2; 0,5)$	$s_N(0,6; 0,3)$	$s_N(0,8; 0,1)$
79	1,470	1,305	0,784	0,570
80	1,471	1,275	0,786	0,566
81	1,469	1,290	0,779	0,571
82	1,470	1,282	0,788	0,565
83	1,468	1,292	0,781	0,570
84	1,468	1,262	0,785	0,564
85	1,466	1,291	0,778	0,568
86	1,467	1,268	0,786	0,562
87	1,464	1,277	0,778	0,566
88	1,465	1,271	0,779	0,562
89	1,462	1,281	0,772	0,566
90	1,465	1,265	0,781	0,561
91	1,463	1,289	0,774	0,563
92	1,464	1,274	0,777	0,561
93	1,462	1,283	0,770	0,557
94	1,463	1,275	0,779	0,559
95	1,461	1,283	0,773	0,555
96	1,462	1,268	0,773	0,558
97	1,460	1,281	0,767	0,556
98	1,461	1,270	0,776	0,557
99	1,460	1,278	0,770	0,553

Однако равенство (4.37, a) не столь удовлетворительно, ибо σ_r велико. Причина этого в том, что значения k_N неустойчивы относительно N при фиксированных p_0, p_1 . Вероятно, это частично объясняется тем, что, во-первых, может существовать несколько значений N , дающих очень близкие значения f , и несовершенство метода вычислений не позволяет

выделить наилучшее из них; во-вторых, может оказаться, что интерполяции, как уже было сказано, не дают удовлетворительного результата на границах $p_0^{(j)}=1$, $p_1^{(j)}=1$ и $p_0^{(j)}+p_1^{(j)}=1$. Первая из этих неприятностей преодолевается основными данными, при которых, для многих значений p_0 , p_1 , два весьма далеких друг от друга значения k постоянно повторяются и одно из них, вероятно, является корректным. Примеры таких основных данных см. в таблице 4.6.

Т а б л и ц а 4.6

N	$r_N(0,3; 0,3)$	$r_N(0,6; 0,1)$	$r_N(0,8; 0,1)$
79	0,1392	0,4810	0,3544
80	0,1250	0,4750	0,4625
81	0,4938	0,1111	0,4691
82	0,1341	0,4756	0,4634
83	0,1325	0,1084	0,3614
84	0,5000	0,4762	0,4643
85	0,4941	0,1059	0,4706
86	0,1279	0,4767	0,4651
87	0,1264	0,4828	0,3678
88	0,5000	0,4773	0,4659
89	0,4944	0,1124	0,3596
90	0,5000	0,1111	0,4667
91	0,1538	0,1099	0,3956
92	0,5000	0,4783	0,4674
93	0,4946	0,1075	0,4624
94	0,5000	0,4787	0,4894
95	0,1368	0,4737	0,4632
96	0,5000	0,4792	0,3750
97	0,4948	0,4742	0,4639
98	0,1327	0,1122	0,4694
99	0,1313	0,1111	0,4646

20. РАССМОТРЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

С помощью теории информации можно получить нижнюю границу f_N для вполне оптимальной политики. При одном взвешивании мы имеем три возможных исхода: равновесие и два исхода в случае неуравновешивания. Поэтому при таком взвешивании ожидаемая величина получаемой нами информации равна не более чем 1 единице $= \log_2 3$.

Если фальшивых монет нет, то знание этого факта эквивалентно $-\log_2 p_0$ единицам информации. Если имеется одна фальшивая монета, то ею может быть любая из N монет с вероятностью $\frac{p_1}{N}$; отсюда суммарная информация, соответствующая определению каждой из этих возможностей, равна $-\log_2 (p_1/N)$, так что ожидаемое количество информации, соответствующей всем N возможностям, равно

$$N \left(\frac{p_1}{N} \right) \left(-\log_2 \frac{p_1}{N} \right) = -p_1 \log_2 \frac{p_1}{N} \text{ единиц.}$$

Аналогично информация, соответствующая случаю двух фальшивых монет, будет равна

$$-p_2 \log_2 \frac{p_2}{N(N-1)^{1/2}}.$$

Следовательно, нижней границей для f_N служит отношение ожидаемого количества информации к единице информации $\log_2 3$:

$$F = - \sum_{i=0}^2 p_i \log_3 p_i + p_1 \log_3 N + p_2 \log_3 \frac{N(N-1)}{2}. \quad (4.38)$$

Сравнение этого выражения с нашими результатами подтверждает утверждения (b) и (c) в § 19, но еще раз подчеркивает, что несовершенство интерполяционной процедуры дает несколько заниженную оценку для значений f_N , по крайней мере для $p_0 + p_1 \leq 0,6$. Например, в таблице 4.4 подчеркнутые значения f_N ниже границы F , вычисленной по формуле (4.38). Тем не менее мы можем найти некоторое утешение в том, что полученные значения f_N означают, что мы имеем хорошую субоптимальную политику, так как эти значения имеют тот же порядок, что и F .

Из (4.38) можно также заключить, что

$$\frac{F}{\log_2 N} \rightarrow (p_1 + 2p_2) \log_3 2, \quad (4.39)$$

что согласуется с утверждением (c) предыдущего параграфа. Когда $p_2 = 1$, то выражение обращается в $2 \log_3 2 = 1,26$ и, следовательно, утверждение, эквивалентное (a), должно для оптимальной политики принять вид

$$f_N(0, 0, 1) \rightarrow 1,26 \log_3 N. \quad (4.40)$$

Наконец, можно показать, что минимум F при $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ достигается, когда

$$f_0 = \frac{p_1}{N} = \frac{p_2}{N(N-1)/2},$$

откуда асимптотически $p_2 = 1$, что подтверждает утверждение (b).

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

Задача нахождения оптимальной процедуры поиска положения абсолютного максимума функции N переменных весьма трудна. Укажем, например, следующие статьи:

A. Gleason, A search problem on the n -cube, Proc. Symposia in Appl. Math., vol. 10, 1960, pp. 175—178.

P. Wolfe, The RAND Symposium on Mathematical Programming, Linear Programming and Recent Extensions, The RAND Corporation, Report R-351, 1959.

Далее, когда априори известно, что функция унимодальна, задача решена только для функций одной переменной. Простейшие соображения по этому поводу см. в § 22 гл. I книги «Динамическое программирование», где мы следовали неопубликованной статье Джонсона. Более серьезное рассмотрение можно найти в статье:

J. Kiefer, Sequential minimax search for a maximum, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 4, 1953, pp. 502—506,

и дальнейшие результаты в статье:

J. Kiefer, Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 5, 1957, pp. 105—136.

Результаты относительно положения корня монотонной функции содержатся в работе:

O. Gross and S. Johnson, Sequential minimax search for a zero of a convex function, Math. Tables and Other Aids to Computation, vol. 13, 1959, pp. 44—51.

Укажем еще статьи:

M. Sandelius, On an optimal search procedure, Amer. Math. Monthly, vol. 68, 1961, pp. 133—134.

H. Robbins, Some aspects of the sequential design of experiments, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 58, 1952, pp. 527—536.

A. Dvoretzky, On stochastic approximation, Proc. Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, California, vol. 1, 1956, pp. 39—56.

G. E. P. Box, Evolutionary operations, a method for increasing industrial productivity, Appl. Stat., vol. 6, 1957, pp. 3—23.

- D. J. Newman, Locating the maximum point on a unimodal surface, *Notices of the Amer. Math. Soc.*, vol. 6, 1959, p. 799.
J. Kiefer and J. Wolfowitz, Stochastic estimation of the maximum of a regression, *Ann. Math. Stat.*, vol. 23, pp. 462—466.
R. C. Norris, A Method for Locating the Maximum of a Function of a Single Variable in the Presence of Noise, *Lincoln Laboratory*, 22G-0035, 1960.
E. J. Magee, An Empirical Investigation of Procedures for Locating the Maximum Peak of a Multiple-peak Regression Function, *Lincoln Laboratory*, 22G-0046, 1960.

Важным приложением общей теории процессов поиска является задача медицинской диагностики и лечения. Недавно появились следующие работы, касающиеся этого вопроса:

- R. S. Ledley and L. B. Lusted, Reasoning foundation of medical diagnosis, *Science*, vol. 130, 1959, pp. 9—21.
N. Mantel, Principles of Chemotherapeutic screening, *Proc. Fourth Berkeley Symposium*, University of California Press, Berkeley, California, 1962.
B. B. Winter, Optimal diagnostic procedures, *IRE Trans. on Reliability and Quality Control*, vol. RQC-9, 1960, pp. 13—19.

§ 5. Детальное и интересное обсуждение этих вопросов можно найти в книге:

- H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

§§ 14—20. Материал этих параграфов заимствован из статьи:

- R. Bellman and B. Gluss, On various versions of the defective coin problem, *Information and Control*, vol. 4, 1961, pp. 118—131.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Существует обширная литература, посвященная приложению теории оптимального поиска к задачам автоматического управления. Основные положения можно найти в книгах:

- А. А. Фельдбаум, *Вычислительные устройства в автоматических системах*, Физматгиз, 1960.
А. А. Первозванский, *Случайные процессы в нелинейных автоматических системах*, Физматгиз, 1962.
S. S. L. Chang, *Synthesis of Optimum control systems*, McGraw-Hill, New York, 1961.

Там же имеется более подробная библиография.

О числах Фибоначчи см.

- Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*, изд. 2, изд-во «Наука», 1964.

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В следующих главах мы увидим, что целый ряд важных задач, возникающих при исследовании траекторий, многошаговых процессов производства и, наконец, в области управления с обратной связью можно сформулировать в терминах вариационного исчисления. Хотя аппарат этой теории играет важную роль при аналитическом рассмотрении многих классов вариационных задач, он до сих пор мало использовался при численном решении проблем современной науки и техники.

Чтобы объяснить это явление, мы изложим здесь основы вариационного исчисления, а затем подробно обсудим трудности, которые встречаются на пути численного решения вариационными методами. К задачам такого рода мы дадим подход с помощью динамического программирования и покажем, каким образом можно обойти или преодолеть некоторые из этих трудностей.

Затем мы коротко покажем, как подход с помощью функциональных уравнений, основанный на принципе оптимальности, приводит к основным классическим результатам вариационного исчисления, а также теории Гамильтона—Якоби.

Читатель, интересующийся только численным решением процессов нахождения траекторий и процессов управления с обратной связью, может пропустить эту главу при первом чтении. Во всех следующих главах, посвященных соответственно траекторным процессам, многошаговым процессам

производства (частный класс процессов управления с обратной связью экономического происхождения) и задачам управления с обратной связью технического происхождения, мы не будем опираться на результаты этой главы. В главе XII, посвященной рассмотрению вычислительных сторон, будет дано решение задачи о брахистохроне методами динамического программирования.

В приложении мы рассмотрим новый подход, принадлежащий Брайсону, который является, по-видимому, чрезвычайно многообещающим, поскольку он преодолевает преграду размерности, о которой говорилось ранее.

2. ФУНКЦИОНАЛЫ

В обычном анализе имеют дело с **задачей максимизации** или минимизации функции N переменных

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (5.1)$$

В вариационном исчислении рассматриваются задачи, содержащие функции от бесконечного числа переменных или, что то же самое, функции от функций. Для обозначения скалярной величины, зависящей от функции, обычно пользуются термином *функционал*. Подобно тому как функция есть правило сопоставления числа конечному множеству чисел, функционал есть правило сопоставления числа функции или множеству функций.

Простейшим и наиболее важным примером функционала является интеграл Римана

$$I(y) = \int_a^b y(x) dx, \quad (5.2)$$

определенный для всех функций $y(x)$, непрерывных на $[a, b]$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением функционалов вида

$$I(y) = \int_a^b g(y(x), y'(x), x) dx, \quad (5.3)$$

где, как обычно, $y'(x)$ означает производную функции $y(x)$. Функция $y(x)$ будет подчинена граничным условиям вида

$$y(a) = c_1, \quad h(y(b), y'(b)) = c_2. \quad (5.4)$$

Смысл такого рода соотношений будет пояснен ниже.

Более общей является задача максимизации или минимизации функционала вида

$$I(y) = \int_a^b g(y(x), z(x), x) dx, \quad (5.5)$$

где x , y и z связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{dz}{dx} = H(z, y, x), \quad z(0) = c_1. \quad (5.6)$$

Еще более общей является задача максимизации или минимизации выражения

$$I(y) = \int_a^b g(z(x), y(x), x) dx + h(z(b), y(b), b), \quad (5.7)$$

где x , y подчинены (5.6) и, возможно, дополнительным ограничениям.

Эта задача называется *задачей Больца*, а задача отыскания экстремума функции в конечной точке b

$$I(y) = h(z(b), y(b), b) \quad (5.8)$$

называется в вариационном исчислении *задачей Майера*. Мы будем называть эту последнюю задачу *процессом регулирования по конечному состоянию*.

Обе задачи являются частными случаями задачи оптимизации интеграла Римана—Стилтьеса

$$I(y) = \int_a^b g(z(x), y(x), x) dG(x), \quad (5.9)$$

которую мы не будем рассматривать. В большинстве важных приложений функционал $I(y)$ имеет вид (5.7), где g или h тождественно равны нулю.

3. ФОРМАЛЬНЫЙ АППАРАТ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Перейдем теперь к описанию основного метода вариационного исчисления и приведем некоторые классические результаты. Мы сделаем это для того, чтобы сравнить два различных аппарата — аппарат вариационного исчисления и аппарат

динамического программирования. В дальнейшем мы укажем преимущества и неудобства каждого из них. Наиболее вероятно, что в конечном счете синтез этих двух методов покажет свою способность справляться с действительно сложными задачами оптимального управления и оптимальных траекторий. То, что два метода на самом деле дополняют друг друга, будет следовать из приведенной ниже геометрической интерпретации.

В вариационном исчислении стараются получить уравнение для оптимизирующей функции. Действуя чисто формально, опуская многие сложные вопросы существования и единственности решения, которые возникают в самом начале, исследуем задачу нахождения функции $y(x)$, минимизирующей функционал

$$\int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx. \quad (5.10)$$

Будем применять непосредственное обобщение вариационного подхода, используемого для функций от конечного числа переменных. В действительности основное уравнение вариационного исчисления было получено Эйлером путем перехода к пределу от конечного к бесконечному. Как следует ожидать по аналогии с обычным анализом, условия, которые мы получим, будут необходимыми, но, вообще говоря, недостаточными.

Пусть $y(x)$ означает минимизирующую функцию. Мы можем считать, что она дает относительный минимум. Если $z(x)$ — любая «близкая» к ней функция, то должно быть

$$I(z) \geq I(y). \quad (5.11)$$

Чтобы выразить тот факт, что $z(x)$ — близкая функция, запишем ее в виде

$$z(x) = y(x) + \varepsilon g(x), \quad (5.12)$$

где $g(x)$ — пока не определенная функция, а ε — малый параметр. Функция $z(x)$ не является наиболее общей формой близкой функции, но для нас это неважно, поскольку, как отмечено выше, речь идет о *необходимых* условиях. Важно понимать, что для получения необходимых условий, мы можем выбрать любой удобный класс близких функций.

Тогда неравенство (5.11) принимает вид

$$I(y + \varepsilon g) \geq I(y) \quad (5.13)$$

для всех ε и $g(x)$, или в явном виде

$$\int_a^b F(y + \varepsilon g, y' + \varepsilon g', x) dx \geq \int_a^b F(y, y', x) dx. \quad (5.14)$$

Чтобы получить отсюда более полезный результат, разложим в ряд левую часть как функцию от параметра ε . В этом разложении достаточно сохранить только постоянный и линейный члены, поскольку ε предполагается малым параметром. Тогда получим соотношение

$$I(y) = \varepsilon \left[\int_a^b (F_y g + F_{y'} g') dx \right] + O(\varepsilon^2) \geq I(y). \quad (5.15)$$

Для того чтобы это неравенство выполнялось как для положительных, так и для отрицательных значений малого параметра ε , мы должны иметь:

$$\int_a^b (F_y g + F_{y'} g') dx = 0. \quad (5.16)$$

Поскольку $g(x)$ — произвольная функция, это соотношение должно выполняться для всех $g(x)$, имеющих производные на $[a, b]$.

Полезно заметить, что уравнение (5.16) можно было бы получить также из условия, что $dI/d\varepsilon$ должно быть равно нулю при $\varepsilon = 0$.

Для того чтобы извлечь отсюда как можно больше, проинтегрируем второе слагаемое в подынтегральном выражении по частям; мы получим:

$$\int_a^b \left[g(x) F_y - g(x) \frac{d}{dx} (F_{y'}) \right] + [g(x) F_{y'}]_a^b = 0. \quad (5.17)$$

Так как сейчас мы имеем дело с необходимыми условиями внутри интересующего нас интервала, положим на момент

$$g(a) = g(b) = 0. \quad (5.18)$$

Это равносильно утверждению, что мы фиксируем концы оптимизирующей кривой. В результате получим, что для всех

допустимых $g(x)$ имеет место

$$\int_a^b g(x) \left[F_y - \frac{d}{dx} (F_{y'}) \right] dx = 0. \quad (5.19)$$

Если бы (5.19) было справедливо для *всех* $g(x)$, то, очевидно, служащая коэффициентом функция была бы равной нулю, т. е.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (5.20)$$

Чтобы установить это, нам достаточно положить $g(x) = F_y - dF_{y'}/dx$. Тогда подынтегральная функция в (5.19) будет полным квадратом, откуда следует (5.20). Однако, как указывалось выше, мы в действительности рассматриваем не все возможные $g(x)$, а только те, которые имеют производные, более того, только те функции, производные которых ведут себя достаточно хорошо, настолько, что имеют смысл написанные интегралы. Поскольку нам заранее не известен вид решения, нет никакой гарантии, что функция $F_y - dF_{y'}/dx$ — допустимая.

Тем не менее в одном из основных результатов вариационного исчисления («основная лемма вариационного исчисления») установлено, что если (5.19) выполняется для всех допустимых $g(x)$, то имеет место уравнение (5.20).

Строгие формулировки этих вариационных задач и подробные доказательства перечисленных результатов можно найти в стандартных руководствах, перечисленных в конце главы. Мы не будем здесь углубляться далее в предмет, поскольку, как мы увидим ниже, имеются разные пути обхода ряда вопросов строгого обоснования.

Уравнение (5.20) в раскрытом виде представляет собой уравнение второго порядка, оказывающееся, за исключением легко определяемых случаев, нелинейным. Оно называется *уравнением Эйлера* вариационной задачи и является необходимым условием, полностью аналогичным условию, которое получается в конечномерном случае, когда приравнивают нулю первые производные.

Лишь в редких случаях удается получить точное аналитическое решение этого уравнения в элементарных функциях анализа. Классические примеры можно найти в ссылках, данных в конце главы.

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

Как и в анализе, для минимизирующей и максимизирующей функций, а также для функций, дающих точки стационарности более сложной природы, получается одно и то же уравнение. Правила для различения этих случаев до некоторой степени известны, но общая картина весьма туманна.

Двумя наиболее важными условиями минимума являются:

Условие Вейерштрасса. Пусть $z(x)$ — функция, отличная от экстремальной функции $y(x)$, а $z'(x)$ — ее производная. Тогда должно выполняться неравенство

$$F(x, y, z') - F(x, y, y') - (z' - y') F_{y'}(x, y, y') \geq 0. \quad (5.21)$$

Левая часть этого неравенства называется *E-функцией Вейерштрасса*.

Условие Лежандра. Для того чтобы $y(x)$ была минимизирующей функцией, должно выполняться неравенство

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0, \quad (5.22)$$

что в анализе соответствует обычному условию на вторую производную.

Эти условия, не являющиеся интуитивными с точки зрения классического вариационного подхода к проблемам оптимизации, как будет показано ниже, логически и просто вытекают из подхода с точки зрения динамического программирования.

5. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Иногда в вариационных задачах на экстремальную функцию налагают условия на концах вида

$$G(y(a), y'(a)) = 0, \quad H(y(b), y'(b)) = 0. \quad (5.23)$$

Чаше ограничение задается на левом конце интервала, а условие на правом конце включается в саму вариационную задачу. Обратившись к уравнению (5.19), мы видим, что, если y должно принимать в точках a и b фиксированные значения, то разумно требовать, чтобы $g(x)$ в этих точках обращалась в нуль. С другой стороны, если y определена только в точке b или вообще не определена, то вариация функции $g(x)$ в точке

$x = a$ приводит к соотношению

$$F_{y'} = 0 \quad \text{при} \quad x = a. \quad (5.24)$$

Это последнее условие называется *естественным граничным условием*.

6. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Часто мы сталкиваемся с задачей максимизации или минимизации функционала $I(y)$ при интегральном ограничении вида

$$\int_a^b G(y, y', x) dx = c_1, \quad (5.25)$$

что в приложениях обычно означает ограниченность некоторого ресурса. При разных условиях можно показать, что, как и в обычном анализе, мы можем применить *множители Лагранжа* и рассматривать новую задачу отыскания экстремума функционала

$$\int_a^b [F(y, y', x) - \lambda G(y, y', x)] dx. \quad (5.26)$$

Таким образом мы получаем видоизмененное уравнение Эйлера

$$(F - \lambda G)_y - \frac{d}{dx} (F_{y'} - \lambda G_{y'}) = 0, \quad (5.27)$$

где λ — постоянная, которая подлежит определению с помощью соотношения (5.25).

Как будет показано ниже, этот результат следует также из метода функциональных уравнений динамического программирования. По-видимому, довести решение задачи такого рода до самого конца — дело не простое.

7. НЕДОСТАТКИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Трудности, которые мы перечисляли в связи с применением анализа при рассмотрении конечномерных задач оптимизации, как и следовало ожидать, имеют место и в этих более трудных вариационных задачах над пространствами функций, и притом в более сложных формах.

После первоначальной стадии развития вариационного исчисления, связанной с именами Эйлера, Лагранжа, Вейерштрасса, Гильберта, Больца, Бласса и других, этот предмет в гораздо большей степени был пригоден для изложения в учебниках, чем для практического использования. Разумеется, трудно было надеяться на получение какого-либо решения более приятного вида, чем решение, даваемое дифференциальным уравнением Эйлера. А потому последующие работы были посвящены приданию дальнейшей строгости известному формальному аппарату и привели к получению различных необходимых и достаточных условий для разных типов экстремумов, а также к расширению класса функционалов, к которым можно было бы применить этот аппарат.

Некоторое значение придавалось проблеме получения численных результатов, но основной упор делался на теоремы существования и единственности.

Однако появление быстродействующих вычислительных машин сильно повлияло на математическое мышление. Имея в распоряжении такое мощное орудие, мы теперь оцениваем аналитический аппарат не только с точки зрения его изящества, но также со стороны его вычислительной осуществимости. К сожалению, именно с этой точки зрения он весьма неудовлетворителен.

В действительности имеется несколько различного рода трудностей, связанных с классической формулировкой вариационных вопросов. Некоторые из них вытекают из самой вариационной задачи, а некоторые — из уравнения Эйлера. Рассмотрим сначала вопрос о численном решении уравнения Эйлера.

Как указывалось выше, это в большинстве случаев нелинейное уравнение. Кроме того, это нелинейное уравнение с граничными условиями в двух точках. Чтобы понять значение этого последнего утверждения, рассмотрим вкратце, что требуется для численного решения дифференциального уравнения.

Поскольку вероятность получения удобного аналитического решения пренебрежимо мала, для численных расчетов мы должны прибегнуть к помощи машин-аналогов, включающих использование методов Монте-Карло, или же к помощи цифровых вычислительных машин. В большинстве случаев следует использовать цифровую вычислительную машину.

Так как вычислительная машина производит только обычные арифметические операции, приходится преобразовать рассматриваемое уравнение к виду, требующему только использования этих операций и не содержащему каких-либо трансцендентных операций, таких, как дифференцирование или интегрирование. Это значит, что мы должны приближаться к интегралам с помощью сумм, а к производным с помощью разностей. Такое приближение можно сделать бесконечным числом способов, требующих тщательного взвешивания факторов точности, устойчивости и времени. Все это, конечно означает, что в настоящее время численный анализ является, скорее искусством, чем наукой.

Избегая всех тонких деталей, неизбежно входящих в любой конкретный вычислительный процесс, изложим общую идею решения дифференциального уравнения с помощью счетной машины. В заданном уравнении

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = c_0 \quad (5.28)$$

(задаче с заданным начальным значением) заменяем производную приближенным выражением вида

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad y'(x) &\approx \frac{[y(x + \Delta) - y(x)]}{\Delta} \\ y'(x) &\approx \frac{[y(x + \Delta) - y(x - \Delta)]}{2\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

При использовании первого представления (в некотором смысле худшего из возможных) дифференциальное уравнение (5.28) заменится следующим разностным уравнением:

$$\frac{y(x + \Delta) - y(x)}{\Delta} = f(x, y), \quad y(x_0) = c, \quad (5.30)$$

где x предполагается теперь принимающим только значения $x_0, x_0 + \Delta, x_0 + 2\Delta, x_0 + 3\Delta$ и так далее.

Задавая начальное значение $y(x_0)$, мы вычисляем по формуле (5.30) значение $y(x_0 + \Delta)$. Далее с помощью найденного значения $y(x_0 + \Delta)$ по этой формуле определяется значение y при $x = x_0 + 2\Delta$ и т. д. Такого типа итеративный алгоритм идеально подходит для цифровой машины, так как здесь требуется только последовательное повторение одной и той же операции. Следовательно, для выполнения всего процесса достаточно одного набора команд.

Выбор Δ зависит от требуемой точности и от времени, отведенного на вычисления. В общем, чем меньше Δ , тем более точным будет полученное таким путем решение. С другой стороны, время, необходимое для определения значения y в некоторой точке $x = x_1$, очевидно, пропорционально $1/\Delta$. Кроме того, имеют место еще требования устойчивости. По этой причине приближение (5.30) является более предпочтительным, чем (5.29).

Мы не будем вникать глубже в эти важные вопросы, поскольку в связи с решением вариационных задач в этом направлении мало сделано. Читатель, которого интересуют результаты, известные для дифференциальных уравнений, может обратиться к списку литературы в конце главы.

Аналогичный метод применяется для решения системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N), \quad y_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.31)$$

Если использовать векторные обозначения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = c, \quad (5.32)$$

то формально процедура в точности совпадает с приведенной выше.

Так как цифровые машины идеально подходят для решения дифференциальных уравнений с начальными условиями, то вполне можно мыслить себе решение систем вида (5.31) с сотнями или даже тысячами уравнений.

8. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

В случае, когда заданы условия на двух концах, ситуация существенно меняется. Рассмотрим уравнение второго порядка вида

$$y'' = g(x, y, y'), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (5.33)$$

где решение подчинено граничным условиям

$$y(x_0) = c_1, \quad y(x_1) = c_2.$$

Используя конечноразностные приближения и полагая

$$\left. \begin{aligned} y'(x) &= [y(x + \Delta) - y(x)]/\Delta, \\ y''(x) &= [y(x + 2\Delta) - 2y(x + \Delta) + y(x)]/\Delta^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

мы видим, что, хотя $y'(x_0)$ задано, у нас нет явного способа определения $y(x_0 + \Delta)$, поскольку не определено значение $y'(x_0)$.

Обычный выход из этого тупика заключается в приближительной оценке значения $y'(x_0)$, а затем в использовании для получения значения $y(x_1)$ методов, описанных в § 7. Затем первоначальная оценка для $y'(x_0)$ последовательно изменяется, пока не будет приемлемого согласия между предписанным значением в x_1 и значением, полученным при интегрировании.

В случае нелинейного уравнения Эйлера метод корректировки первоначально выбранного значения $y'(x_0)$ совершенно произволен, и для него не имеется каких-либо определенных правил. Во многих случаях неустойчивость как аналитического, так и вычислительного происхождения вызывает большие колебания в значении $y(x_1)$ при малых изменениях $y'(x_0)$.

Не существует никакого практического способа предсказания численной неустойчивости для систем нелинейных дифференциальных уравнений, но опыт вариационного подхода к проблемам траекторий убедительно показывает, что неустойчивость представляет весьма реальную и часто непреодолимую проблему.

В силу этого желательно иметь способ получения численного решения исходной вариационной задачи, который не зависел бы от решения двухточечных краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

9. ОГРАНИЧЕНИЯ

Гораздо более серьезная со многих точек зрения трудность, чем трудность, связанная с чисто вычислительной стороной в случае двухточечных краевых задач, возникает от наличия ограничений на природу оптимизирующей функции.

Рассмотрим, например, задачу минимизации функционала

$$I(y) = \int_a^b g(y, y', x) dx \quad (5.35)$$

при ограничении вида

$$|y'| \leq c_1. \quad (5.36)$$

Поскольку существование уравнения Эйлера основано на предположении, что вблизи от экстремали допускается свободное (двустороннее) варьирование, мы должны примириться с фактом, что здесь вообще может не быть никакого уравнения Эйлера! Решение может состоять из интервалов, на которых $y' = c_1$, чередующихся с интервалами, где $y' = -c_1$. Или могут быть интервалы, где $y' = c_1$ или $y' = -c_1$, а также интервалы, где $|y'| < c_1$. Это означает, что уравнение Эйлера будет удвлетворяться внутри тех интервалов, где $|y'| < c_1$. Решение тогда может иметь вид, изображенный на рис. 61.

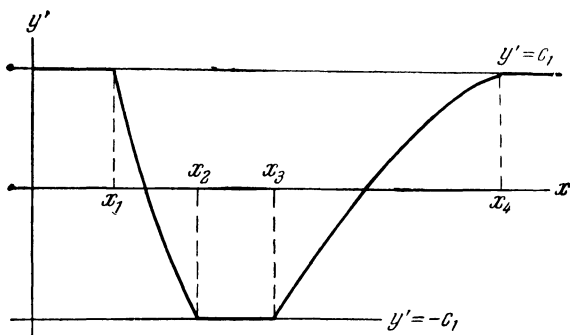


Рис. 61.

Нетрудно построить примеры, в которых такие колебания могут встречаться сколь угодно часто. Даже простые варианты траекторных процессов, процессов управления и процессов с «узкими местами» могут иметь решения с тремя или четырьмя чередованиями. В результате такого усложнения задачи этого типа чрезвычайно трудны для решения. Они требуют комбинирования аналитических методов и изобретательности, и в настоящее время не существует никаких единых методов для получения явных решений. Ниже будут даны ссылки на ряд решенных частных задач.

Каковы бы ни были трудности при численном решении обычной вариационной задачи, они несравнимы с возникающими здесь трудностями. Требуется не только угадать начальные значения, но во многих случаях также угадать начальные фазы решения и устойчивость этих фаз. Указанную выше задачу, где $|y'| \leq c_1$, можно решать с помощью множителей

Лагранжа и приближенных значений для начальных условий. Задачу минимизации при ограничении вида $|y| \leq c_2$ таким образом решить, по-видимому, нельзя.

Как мы увидим, метод динамического программирования дает путь обхода этих трудностей; во многих случаях численное решение задач с ограничениями фактически даже облегчается (благодаря наличию ограничений *).

10. ЛИНЕЙНОСТЬ

Исследование оптимального использования экономических комплексов, данное в главе VII, приводит к аналитической задаче максимизации скалярного произведения

$$I(y) = (x(T), a), \quad (5.37)$$

где x и y связаны векторно-матричным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By, \quad x(0) = c, \quad (5.38)$$

и ограничением в виде неравенства

$$Cy \leq Dx. \quad (5.39)$$

Линейность этой задачи делает классический вариационный подход невозможным. Для этой задачи максимизации уравнения Эйлера просто не существует.

11. ФОРМАЛЬНЫЙ АППАРАТ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Опишем теперь коротко подход к вариационным задачам с помощью динамического программирования. Как и ранее, действуем чисто формально.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (5.40)$$

где функция y подчинена граничному условию $y(a) = c$. Минимальное значение будет функцией начального значения a , переменной x и граничного значения c функции y . Здесь c

*) См. обсуждение в § 17 главы I.

измеряет начальное состояние системы, а a определяет продолжительность процесса.

Введем теперь функцию

$$f(a, c) = \min_y I(y). \quad (5.41)$$

Итак, мы включили предложенную выше частную задачу, где a и c — постоянные, в семейство задач, возникающих, когда параметры a и c меняются в областях $-\infty < a < b$ и $-\infty < c < \infty$.

Начнем с вывода уравнения для функции $f(a, c)$, а затем покажем, как это уравнение приводит к результатам, уже перечисленным в параграфах, посвященных вариационному исчислению, а также к некоторым дальнейшим результатам.

В силу аддитивности интеграла

$$\int_a^b = \int_a^{a+\Delta} + \int_{a+\Delta}^b \quad (5.42)$$

из принципа оптимальности немедленно получаем функциональное уравнение

$$f(a, c) = \min_{y[a, a+\Delta]} \left[\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y') dx + \right. \\ \left. + f(a+\Delta, c(y)) \right], \quad (5.43)$$

где минимизация производится по всем функциям y , определенным на промежутке $a \leq x \leq a+\Delta$ и удовлетворяющим условиям $y(a) = c$ и $c(y) = y(a+\Delta)$.

Мы используем это соотношение двояким образом: в аналитических рассуждениях — устремляя Δ к 0, а при численных расчетах — взяв Δ малым, но отличным от нуля. Ниже эти подходы будут рассмотрены весьма подробно.

Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что функция $f(a, c)$ имеет непрерывные первую и вторую производные.

12. ОСНОВНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Заметим, что выбор $y(x)$ на интервале $[a, a+\Delta]$ при ограничении $y(a) = c$ можно трактовать как выбор $y'(x)$ на интервале $[a, a+\Delta]$. Если Δ мало, то выбор $y'(x)$ на $[a, a+\Delta]$ эквивалентен выбору $y'(a)$ в предположении

непрерывности $y'(x)$. Таким образом, используя выражения

$$\int_a^{a+\Delta} F(x, y, y') dx = F(a, c, y'(a)) \Delta + o(\Delta), \quad (5.44)$$

$$c(y) = a + y'(a) \Delta + o(\Delta)$$

и равенство $v \equiv y'(a)$, можно переписать (5.43) в следующем виде:

$$f(a, c) = \min_v [F(a, c, v) \Delta + f(a + \Delta, c + v\Delta)] + o(\Delta). \quad (5.45)$$

Устремляя Δ к 0, получим в пределе нелинейное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial f}{\partial a} = \min_v \left[F(a, c, v) + v \frac{\partial f}{\partial c} \right]. \quad (5.46)$$

Начальное условие состоит в том, что $f(b, c) = 0$ для всех c ; уравнение (5.46) остается в силе при $a < b$.

13. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Для того чтобы избежать смещения результатов на постоянную, примем нижнюю границу a за x , а за y' — введенную выше величину v .

Формальное разложение (5.45) в степенной ряд приводит к уравнению

$$f(x, y) = \min_{y'} \left[F(x, y, y') \Delta + f(x, y) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta + \frac{\partial f}{\partial y} y' \Delta + \dots \right]. \quad (5.47)$$

При $\Delta \rightarrow 0$ получим нелинейное уравнение в частных производных

$$0 = \min_{y'} \left[F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \right] \quad (5.48)$$

(уравнение (5.46)). Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$F_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.49)$$

которое получается взятием частной производной по y' , и

$$F + \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.50)$$

которое справедливо для x , y и y' , удовлетворяющих (5.49). Продифференцировав (5.49) по x , получим уравнение

$$\frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' = 0. \quad (5.51)$$

Взяв частную производную от (5.50) по y , получим уравнение

$$F_y + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} = 0. \quad (5.52)$$

Два последних уравнения вместе с уравнением (5.49) приводят к классическому уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0. \quad (5.53)$$

Обычный вывод этого результата из (5.48) основан на теории характеристик.

14. УСЛОВИЕ ЛЕЖАНДРА

Мы использовали тот факт, что в точке минимума должна обращаться в нуль производная функции в (5.48). Добавочное требование о том, что в точке минимума должна быть положительной вторая производная по y' , приводит к неравенству

$$F_{y'y'} > 0, \quad (5.54)$$

представляющему собой классическое условие Лежандра.

15. УСЛОВИЕ ВЕЙЕРШТРАССА

Выполнение условия Лежандра не исключает возможности того, что минимум является только относительным. Для существования абсолютного минимума для всех функций $Y' = Y'(x, y)$ должно выполняться неравенство

$$F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} \leq F(x, y, Y') + \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} \quad (5.55)$$

или

$$F(x, y, Y') - F(x, y, y') + (Y' - y') \frac{\partial f}{\partial y} \geq 0, \quad (5.56)$$

которое, если воспользоваться уравнением (5.49), принимает вид

$$F(x, y, Y') - F(x, y, y') - (Y' - y') F_{y'} \geq 0. \quad (5.57)$$

Это и есть необходимое условие Вейерштрасса для абсолютного минимума.

16. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Приведенный метод легко переносится на случай задачи минимизации функционала

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_x^b F(y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n; x_1) dx_1, \quad (5.58)$$

где

$$y_1(x) = y_1, \quad y_2(x) = y_2, \dots, \quad y_n(x) = y_n. \quad (5.59)$$

Если встречаются производные высшего порядка, то можно сделать замену переменных, сводящую задачу к предыдущей. Например, если мы хотим минимизировать функционал

$$I(y) = \int_x^b F(y, y', y'', x_1) dx_1 \quad (5.60)$$

по всем функциям y , удовлетворяющим условиям

$$y(x) = y_1, \quad y'(x) = y_2, \quad (5.61)$$

то мы вводим новые переменные

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x), \\ y_2 &= y'(x). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Тогда задача превращается в задачу минимизации функционала

$$I(y_1, y_2) = \int_x^b F(y_1, y'_1, y'_2, x) dx \quad (5.63)$$

при ограничениях

$$y'_1 = y_2, \quad y_1(x) = c_1, \quad y_2(x) = c_2. \quad (5.64)$$

В целях упрощения записи рассмотрим только простой случай, когда в числе ограничений нет дифференциальных уравнений.

Следуя рассуждениям § 13, получим уравнение

$$0 = \min_{y'_1, \dots, y'_n} \left| F + \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{j=1}^n y'_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|, \quad (5.65)$$

которое в свою очередь приводит к уравнениям

$$F_{y'_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.66)$$

$$F + \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{j=1}^n y'_j \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0. \quad (5.67)$$

Отсюда, как выше, получим:

$$\frac{d}{dx} F_{y'_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x} + \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} y'_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.68)$$

и, взяв частные производные по y_i ,

$$\begin{aligned} F_{y_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_j} \frac{\partial y'_j}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y_i} + \sum_{j=1}^n y'_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial y'_j}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Таким образом, мы получили систему уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dx} F_{y'_i} - F_{y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.70)$$

17. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Добавим ограничение

$$\int_x^b G(x_1, y, y') dx_1 = z, \quad (5.71)$$

где z — заданная величина. Наша основная функция, значение минимума, является теперь функцией от трех величин x , y и z . Иными словами, z является дополнительным параметром состояния. Следовательно, имеем:

$$f(x, y, z) = \min_{y'} \int_x^b F(x_1, y, y') dx_1 \quad (5.72)$$

при ограничении (5.71).

Аналогом уравнения (5.45) будет

$$f(x, y, z) = \min_y [F(x, y, y') \Delta - f(x - \Delta, y - y' \Delta, z - G(x, y, y') \Delta)]. \quad (5.73)$$

Действуя как ранее, получим уравнение в частных производных

$$0 = \min_{y'} \left[F(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} - G(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial z} \right]. \quad (5.74)$$

Дифференцирование приводит к соотношению

$$0 = F_{y'} + \frac{\partial f}{\partial y} - G_{y'} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (5.75)$$

Кроме того, имеет место уравнение

$$0 = F + \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} - G \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (5.76)$$

Используя теперь производную (5.75) по x , частную производную (5.76) по y и уравнение (5.75), получим:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \left(F - \frac{\partial f}{\partial z} G \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(F - \frac{\partial f}{\partial z} G \right) = 0. \quad (5.77)$$

Взятие частной производной по z от выражения (5.76) приводит к следующим результатам:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - G \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (5.78)$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \text{const.} \quad (5.80)$$

18. МНОЖИТЕЛЬ ЛАГРАНЖА

Таким образом, мы показали, что производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ играет роль множителя Лагранжа. Кроме того, установлен хорошо известный факт, что в изопериметрической задаче она постоянна, т. е. не зависит от x . Уравнение (5.77) есть уравнение Эйлера для вариационной задачи с множителем Лагранжа λ ,

где в качестве основного функционала берется

$$\int_x^b [F(x_1, y, y') - \lambda G(x_1, y, y')] dx_1. \quad (5.81)$$

19. ЕСТЕСТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Предположим, что $y(a)$ не определено. Тогда оптимальное начальное значение для y обладает тем свойством, что изменение в минимальном значении интеграла, взятого до конечной точки $(b, y(b))$, вызываемое изменением в начальной точке $y(a)$, равно 0. В противном случае имела бы лучшая начальная точка. Значит,

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=a} = 0, \quad (5.82)$$

что вместе с (5.49) дает:

$$F_{y'} \Big|_{x=a} = 0. \quad (5.83)$$

Это естественное граничное условие, связанное с неопределенностью в граничном значении.

20. УСЛОВИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Предположим теперь, что левый конец искомой кривой y должен лежать где-нибудь на заданной кривой $y = g(x)$. Чтобы решить эту задачу, рассуждаем следующим образом. Для оптимальной кривой изменение в f при движении начальной точки вдоль заданной кривой должно быть равным нулю. Это эквивалентно тому, что в начальной точке мы имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + g' \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.84)$$

Обращаясь к (5.50), получим:

$$F + y' \frac{\partial f}{\partial y} - g' \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.85)$$

а из (5.49) следует:

$$F + (g' - y') F_{y'} = 0. \quad (5.86)$$

Это условие, связывающее угловые коэффициенты касательной к экстремали и касательной к кривой $g(x)$ в начальной точке (x, y) , есть классическое условие трансверсальности.

21. УГЛОВЫЕ УСЛОВИЯ ЭРДМАННА

Зададим теперь вопрос, при каких условиях оптимальная функция может терпеть разрыв производной y' . Из (5.49) и непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ следует, что функция $F_{y'}$ в точке излома непрерывна, а тогда из (5.50) видно, что функция

$$F - y'F_{y'} \quad (5.87)$$

непрерывна в точке излома. Это есть угловые условия Эрдманна.

22. НЕЯВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим очень важный класс вариационных задач, в которых не существует какого-либо простого явного выражения для подлежащего минимизации функционала. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(y_1, y_2, \dots, y_N; z; t), \quad y_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.88)$$

и требуется определить неизвестную функцию z так, чтобы минимизировать время, требуемое для перехода системы в состояние (d_1, d_2, \dots, d_N) . Здесь функционал $T = T(z)$ определяется условиями

$$y_i(T) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.89)$$

Иными словами, мы хотим перевести систему из первоначального состояния в желаемое состояние за минимальное время. Очевидно, что многие задачи из области техники и управления производством можно сформулировать таким образом. Чтобы определить структуру решения, введем функцию

$$f(y, t), \text{ равную времени, требуемому для перевода системы из состояния } y \text{ в момент } t \text{ в желаемое конечное состояние.} \quad (5.90)$$

Тогда принцип оптимальности приводит к уравнению

$$f(y, t) = \min_{z(t)} [\Delta + f(y + g\Delta, t + \Delta)] + o(\Delta). \quad (5.91)$$

Вместо (5.88) использовано обозначение $dy/dt = g$. Тогда, переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим чисто формально, как и выше,

$$0 = \min_z \left[1 + \sum_{i=1}^N f_{y_i} g_i + f_t \right]. \quad (5.92)$$

Отсюда следуют два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & 0 = \sum_{i=1}^N f_{y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z}, \\ (b) \quad & 0 = 1 + \sum_{i=1}^N f_{y_i} g_i + f_t. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

Из (5.93) можно теперь извлечь следующие выводы:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & f_t = 0 \text{ при } t = T \text{ по определению } f(y, t). \\ (b) \quad & \sum_{i=1}^N f_{y_i}(T) g_i(T) = -1 \text{ в точке } T, \text{ что следует} \\ & \text{из (5.93) и условия (a).} \\ (c) \quad & \text{Если функции } g \text{ независимы от времени, то} \\ & \sum_{i=1}^N f_{y_i} g_i = -1 \text{ всюду вдоль оптимального пути (это пер-} \\ & \text{вый интеграл решения).} \\ (d) \quad & \text{Из определения } f(y, t) \text{ следует, что для функ-} \\ & \text{ций } y, \text{ значения которых в точке } T \text{ не определены,} \\ & f_{y_i}(T) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

В классической литературе функции f_{y_i} обозначаются λ_i и называются *функциональными множителями* *).

Если множители f_{y_i} известны в точке, то написанные выше уравнения показывают, как определить оптимальное решение z в этой точке. Остается выяснить, каким образом меняются множители как функции времени вдоль оптимального пути. Нам хотелось бы уметь вычислить df_{y_i}/dt .

Дифференцирование показывает, что

$$\frac{d}{dt} f_{y_j} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} f_{y_j} \right) \frac{dy_i}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} f_{y_j} \right) g_i = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_{y_i} \right) g_i. \quad (5.95)$$

*) В работах, связанных с принципом максимума Л. С. Понтрягина, функции λ_i именуются импульсами. (Прим. ред.)

В важном случае, когда дифференциальные уравнения не зависят от времени, взяв частную производную по y_j от (5.93), приходим к соотношению

$$0 = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_{y_i} \right) g_i + \sum_i f_{y_i} \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} + \frac{\partial g_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_j} \right). \quad (5.96)$$

Из этих двух выражений и из (5.93, а) получим уравнения Эйлера для производной по времени функциональных множителей

$$\frac{d}{dt} f_{y_i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_i}{\partial y_j} f_{y_j} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.97)$$

Эти N дифференциальных уравнений первого порядка для множителей вместе с N исходными уравнениями

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(y, z, t) \quad (5.98)$$

и уравнением (5.93, а) образуют систему из $2N + 1$ уравнений, которую можно разрешить относительно N функциональных множителей, N величин y_1, y_2, \dots, y_N и функции политики. $2N$ постоянных интегрирования определяются с помощью N начальных значений y , заданных конечных значений y и условий (5.94, d).

Как и в предшествующих параграфах, различные другие необходимые условия легко следуют из требования, чтобы значение z в (5.92) давало абсолютный минимум.

Указанная выше задача относится к типу так называемых «задач Майера». Обобщая, можно комбинировать задачи Лагранжа и Майера и пытаться минимизировать функционал, содержащий, кроме интеграла от функции, еще дополнительное слагаемое в виде функции, оцениваемой в конечной точке, причем эта функция содержит некоторые переменные, конечные значения которых не определены заранее. Здесь применимы предыдущие рассуждения и результаты выводятся легко. Эта весьма общая задача называется «задачей Больца».

23. ОГРАНИЧЕНИЯ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВ

Во многих современных приложениях мы встречаемся с задачами, где на искомые решения налагаются ограничения в виде неравенств.

Обратившись к сформулированной в предыдущем параграфе задаче, сделаем допущение о том, что управляющая функция z должна быть выбрана таким образом, чтобы выполнялось ограничение

$$h(y, z) \leq 0. \quad (5.99)$$

На границе этой области первое уравнение (5.93) не имеет силы. Таким образом (5.97) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial y_j} - \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \frac{\partial z}{\partial y_i} = 0. \quad (5.100)$$

На границе области, определяемой уравнением $h(y, z) = 0$, имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial y_i} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} = 0. \quad (5.101)$$

Значит, (5.100) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial y_i} = - \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial h}{\partial y_i}, \quad (5.102)$$

где

$$\lambda_j = \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (5.103)$$

и

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\partial g_j}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y_j}}{\frac{\partial h}{\partial z}}. \quad (5.104)$$

Мы видим, таким образом, что с ограничениями в виде неравенств указанного типа можно легко справиться. В классической теории μ появляется как дополнительный множитель Лагранжа, вводимый для включения ограничения.

24. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Покажем теперь, что уравнение Гамильтона — Якоби классической механики чрезвычайно просто следует из принципа оптимальности, связанного в данном случае с принципом Гамильтона. Принцип Гамильтона состоит в том, что частица

движется таким образом, чтобы лагранжиан $\int L(q, \dot{q}, t) dt$ обрелся в минимум.

Пусть q — вектор, описывающий состояние системы (г. е. в терминологии классической механики q есть точка в конфигурационном пространстве) и пусть $\dot{q} = dq/dt$ — искомая величина (решение), которая должна быть выбрана оптимальным образом. Задача заключается в том, чтобы перейти из состояния Q , заданного в момент t_0 , в состояние q в момент t

таким образом, чтобы минимизировать функционал $\int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t_1) dt_1$. Поступаем следующим образом. Определим функцию $S(q, t; Q, t_0)$, равную минимальному значению функционала $\int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t_1) dt_1$ при соответствующих граничных условиях.

Затем, рассматривая оба конца интервала как переменные, получим два соотношения:

$$S(q, t; Q, t_0) = \min_{\dot{Q}(t_0)} [L(Q, \dot{Q}, t_0) \Delta + S(q, t; Q + \dot{Q}\Delta, t_0 + \Delta)], \quad (5.105)$$

$$S(q, t; Q, t_0) = \min_{\dot{q}(t)} [L(q, \dot{q}, t) \Delta + S(q - \dot{q}\Delta, t - \Delta; Q, t_0)]. \quad (5.106)$$

Эти уравнения вытекают из принципа оптимальности, примененного к каждому концу интервала.

В момент t_0

$$0 = \min_Q \left[L + \dot{Q} \frac{\partial S}{\partial Q} + \frac{\partial S}{\partial t_0} \right], \quad (5.107)$$

что влечет за собой, если определить импульс P , как обычно, через $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = - \frac{\partial S}{\partial Q} = P. \quad (5.108)$$

Выражение (5.106) для произвольного момента времени t приводит к двум уравнениям:

$$0 = L - \dot{q} \frac{\partial S}{\partial q} - \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (5.109)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial S}{\partial q} = p. \quad (5.110)$$

Определяя функцию Гамильтона $H(q, p, t)$ согласно формуле $H = p\dot{q} - L$, получим из (5.109) уравнение Гамильтона — Якоби в частных производных

$$0 = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (5.111)$$

Начальное условие о том, что в момент t_0 система находилась в состоянии Q , определяет требуемые константы интегрирования для функции решения $S(q, t; Q, t_0)$. Кроме того, если известны начальные импульсы P , то из уравнения (5.108) находим $q = q(t; Q, P, t_0)$, а из (5.110) $p = p(t; Q, P, t_0)$. Следовательно, решение уравнения Гамильтона — Якоби (5.111) выдает нам положение q и импульсы p как функции от времени и начальных условий. Поскольку методы для аналитического отыскания решения (5.111) и нахождения координат и импульсов как функций от времени рассматриваются во многих публикациях, мы не будем здесь углубляться в детали.

25. ДИСКРЕТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Если мы хотим применить цифровые вычислительные машины для численного решения указанных вариационных задач по намеченному выше пути, то необходимо преобразовать нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (5.46) в уравнение, требующее только арифметических операций.

Это можно сделать разными способами. Один класс методов основан на дискретной аппроксимации точного уравнения; другой — на получении точного уравнения для дискретной аппроксимации исходного непрерывного процесса. Первый класс содержит общепринятые методы, изложенные в целом ряде легко доступных источников. Поскольку в настоящей книге они не будут применяться, мы приступим к рассмотрению методов второго типа, который будет использован при изучении траекторных процессов, многошаговых процессов производства и процессов управления с обратной связью.

Вместо того чтобы выбирать среди функций $y(x)$, заданных на всем интервале $[a, b]$, предположим, что допускается только выбор значений функции $y(x)$ в точках $a = k\Delta$,

$(k+1)\Delta, \dots, N\Delta = b$. Вместо минимизации интеграла

$$I(y) = \int_a^b g(y, y', x) dx \quad (5.112)$$

мы теперь ищем минимум конечной суммы

$$I_k(y) = \sum_{i=k}^{N-1} g(y_i, (y_{i+1} - y_i)/\Delta, i\Delta) \Delta, \quad (5.113)$$

где $y(i\Delta) = y_i$, и производная y' приближается выражением $(y_{i+1} - y_i)/\Delta$.

В общем случае вместо минимизации интеграла

$$I(y) = \int_a^b g(y, z, x) dx, \quad (5.114)$$

где

$$\frac{dy}{dx} = h(y, z, x), \quad y(a) = c, \quad (5.115)$$

мы хотим минимизировать сумму

$$I_k(y) = \sum_{i=k}^{N-1} g(y_i, z_i, i\Delta) \Delta, \quad (5.116)$$

где

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i, z_i, i\Delta) \Delta, \quad y_k = c. \quad (5.117)$$

Обозначив

$$f_k(c) = \min_{\{y_i\}} I_k(y), \quad (5.118)$$

мы путем обычных рассуждений придем к нелинейному дифференциальному уравнению

$$f_k(c) = \min_{z_k} [g(c, z_k, k\Delta) \Delta + f_{k+1}(c + h(y_k, z_k, k\Delta) \Delta)]. \quad (5.119)$$

Если z_k подчинены дополнительным ограничениям, то минимум берется по соответствующему множеству.

В пределе при $\Delta \rightarrow 0$ мы получим, конечно, такое же нелинейное уравнение в частных производных, как и раньше. Именно уравнения такого типа мы будем использовать в следующей главе для получения численного решения траекторных задач.

26. ОБСУЖДЕНИЕ

Описанная выше дискретная вариационная задача получается применением простейшей приближенной формулы для вычисления площади под кривой. Используя правило трапеций, мы получим более сложное выражение, чем (5.116), а более точные квадратурные формулы, как, например, формула Гаусса, приводят к сумме вида

$$I_k(y) = \sum_{i=k}^{N-1} c_i g(y_i, z_i, x_i) \Delta, \quad (5.120)$$

где x_i больше не являются равноотстоящими. Эта идея будет развита далее в главе XII. Поскольку эти вариационные задачи можно рассматривать с помощью того же аппарата функциональных уравнений, то ценой небольших дополнительных усилий мы можем получить существенное повышение точности.

Точно так же и (5.117) получается из (5.115) с помощью грубого приближения

$$\int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} \frac{dy}{dx} dx = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} h(y, z, x) dx \cong h(y_i, z_i, i\Delta) \Delta, \quad (5.121)$$

или

$$y_{i+1} - y_i \cong h(y_i, z_i, i\Delta) \Delta. \quad (5.122)$$

Снова более точная квадратурная формула позволит дать значительное повышение точности при небольшом увеличении объема вычислений.

Однако в дальнейшем мы будем применять только простейшее прямоугольное приближение и будем иметь дело с соотношениями типа (5.116) и (5.117), так как они достаточны для демонстрации используемых методов.

27. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

На первый взгляд кажется довольно неожиданным, что при подходе с помощью функциональных уравнений двухточечные краевые задачи можно заменить задачами с начальным значением.

Рассмотрим задачу минимизации суммы

$$I_k(y) = \sum_{i=k}^{N-1} g(y_i, z_i, i\Delta) \Delta, \quad (5.123)$$

где

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad y_k &= c, \\ (b) \quad y_{i+1} &= y_i + h(y_i, z_i, i\Delta) \Delta \end{aligned} \right\} \quad (5.124)$$

и нет никакого ограничения на значение y_{N-1} . Тогда для $k=0, 1, 2, \dots, N-2$ имеет место рекуррентное соотношение (5.119)

$$f_{N-1}(c) = \min_{z_{N-1}} g(c, z_{N-1}, (N-1)\Delta) \Delta. \quad (5.125)$$

Мы называем эту задачу задачей о начальном значении, поскольку $f_{N-1}(c)$ известно, а с помощью простого итеративного процесса, применяемого к (5.119), можно определить $f_0(c)$.

Что получится, если значение y_N задается заранее? Тогда $f_{N-1}(c)$ находится не из (5.125), а из выражения

$$f_{N-1}(c) = g(c, \bar{z}_{N-1}, (N-1)\Delta) \Delta, \quad (5.126)$$

где \bar{z}_{N-1} определяется соотношением

$$y_N = c + h(c, \bar{z}_{N-1}, (N-1)\Delta) \Delta. \quad (5.127)$$

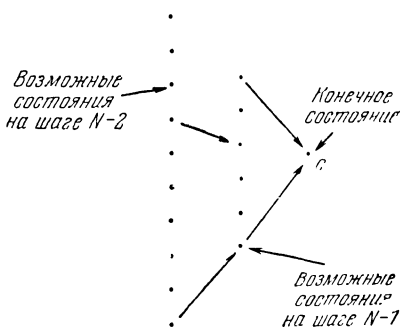


Рис. 62.

Иными словами, \bar{z}_{N-1} находится из условия, что мы должны идти из состояния c в фиксированное состояние y_N .

Если таким путем получено верное значение $f_{N-1}(c)$, то дальше вычисления выполняются, как и выше, по (5.119).

Когда на z наложены ограничения, может оказаться невозможным прийти в y_N на шаге N из любого c на шаге $N-1$. В этом случае $f_{N-1}(c)$ определена только для тех c , из которых мы приходим в y_N . Аналогично $f_{N-2}(c)$ определена только для тех c , из которых можно прийти в возможные состояния на шаге $N-1$, и т. д. (рис. 62).

Как обычно, если следовать методу динамического программирования, ограничения упрощают численное решение.

28. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Поясним сделанное выше замечание, что вариационное исчисление и динамическое программирование представляют собой дополняющие друг друга теории. В вариационном исчислении экстремальную кривую рассматривают как геометрическое место точек и пытаются найти эту кривую с помощью дифференциального уравнения. В теории динамического программирования за экстремаль принимают огибающую касательных и пытаются определить оптимальное направление в каждой точке экстремали.

Из двойственности евклидовой геометрии следует, что кривую можно с одинаковым успехом рассматривать как геометрическое место точек и как огибающую касательных. Следовательно, мы видим, что два представленных здесь подхода — подход с помощью вариационного исчисления и подход с помощью динамического программирования — двойственны друг к другу.

По этой причине можно ожидать, что объединение этих двух подходов окажется гораздо более мощным методом, чем каждый из них в отдельности.

29. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы познакомили читателя с основными задачами вариационного исчисления и с подходами к решению этих задач классическими методами и методами динамического программирования.

После изложения некоторых основных результатов вариационного исчисления мы показали, как дать их простой вывод с помощью функционального уравнения, полученного из принципа оптимальности.

Мы подробно вскрыли трудности, возникающие при попытке использования уравнения Эйлера, а затем показали, как аппарат функциональных уравнений устраняет эти трудности.

В последующих главах это утверждение будет проиллюстрировано примерами из области исследования оптимальных траекторий, многошаговых процессов производства и процессов управления с обратной связью. Для того чтобы

читатель сохранил интерес к изложению, заметим, что при применении динамического программирования возникают новые трудности*), в частности «проклятие размерности».

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Читатель, интересующийся классическим вариационным исчислением, может обратиться к книгам:

R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958 [русский перевод: Курант Р. и Гильберт Д., *Методы математической физики*, М.—Л., ГИТТЛ, 1951].

G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1946 [русский перевод: Д. А. Блiss, *Лекции по вариационному исчислению*, М., ИЛ, 1950].

Случай сложного функционала вида

$$F(y) = \int_a^b g(t, x, y, F_1(y), F_2(y), \dots) dt,$$

где F_1, F_2 — интегральные функционалы, рассматривается в работе:

R. S. Ingarden, *Composite variational problems*, Bull. de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sci. math., astr. et phys., vol. 7, 1959, pp. 687—689.

§ 7. Проблемам устойчивости, связанным с дифференциальными уравнениями, посвящена книга:

R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1954 [русский перевод: Р. Беллман, *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*, ИЛ, 1954], где можно найти много других ссылок.

§ 9. Читателю, который интересуется исследованием решений частных классов вариационных задач, рекомендуем работы:

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, *On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming*, Rend. Circ. Matem. Palermo, serie 2, tomo 3, 1954, pp. 1—35.

*) Это замечание, по-видимому, адресовано читателю-математику, так как интерес читателя-прикладника начинает резко падать, когда ему становится ясным, что эти новые трудности являются практически непреодолимыми. (*Прим. ред.*)

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, Some problems in the theory of dynamic programming — a smoothing problem, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 2, 1954, pp. 82—89.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, On the bang-bang control problem, *Q. Appl. Math.*, vol. 14, 1956, pp. 11—18.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, Some non-classical problems in the calculus of variations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 7, 1956, pp. 87—94.

R. Bellman, W. H. Fleming and D. V. Widder, Variational problems with constraints, *Annali di Mate.*, vol. 41, 1956, pp. 301—323.

§ 11. Изложенный здесь подход приведен в главе 9 книги автора «Динамическое программирование». Впервые он был дан в ряде более ранних работ:

R. Bellman, Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 39, 1953, pp. 1077—1082.

R. Bellman, On the application of dynamic programming to variational problems arising in mathematical economics, *Proc. Symposium in Calculus of Variations and Applications*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956, pp. 115—138.

§ 12. Строгий вывод основного нелинейного уравнения в частных производных (5.46) с точки зрения классической теории дан в работе:

H. Osborn, On the foundations of dynamic programming, *J. Math. and Mech.*, vol. 8, 1959, pp. 867—872.

§ 13. Один из способов получения уравнения Эйлера, использующий теорию характеристик, можно найти в главе 7 книги:

R. Bellman, Dynamic Programming of Continuous Processes, The RAND Corporation, Report R-271, 1954.

Результаты принадлежат Осборну. Другой способ можно найти в статье:

S. Dreyfus, Dynamic programming and the calculus of variations, *J. Math. Anal. and Appl.*, vol. 1, 1960, pp. 228—239,

где имеются остальные результаты главы.

§ 22. Интерес к неявным вариационным задачам ожил в последние годы в связи с одним видом управления с обратной связью, называемым релейным. См. работы:

J. P. LaSalle, On time-optimal control systems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 45, 1959, pp. 573—577.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, On the bang-bang control problem, *Q. Appl. Math.*, vol. 14, 1956, pp. 11—18.

Многочисленные ссылки на «принцип максимума» Понтрягина и последующие работы русской школы даны в книге:

R. Bellman, *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961 [русский перевод: Р. Беллман, *Процессы регулирования с адаптацией*, Изд-во «Наука», 1964].

См. также

J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Recent Soviet contributions to ordinary differential equations and nonlinear mechanics*, J. Math. Anal. and Appl., vol. 2, 1961.

C. A. Desoer, *The bang-bang servo problem treated by variational techniques*, Information and Control, vol. 2, 1959, pp. 333—348.

C. A. Desoer, *Pontrjagin's maximum principle and the principle of optimality*, J. Franklin Inst., vol. 271, 1961, pp. 361—368.

§ 24. Помещенное здесь изложение следует работе:

S. Dreyfus, *Dynamic programming and the calculus of variations*, J. Math. Anal. and Appl., vol. 1, 1960, pp. 228—239.

О классическом подходе см.

E. T. Whittaker, *A Treatise in the Analytic Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

§ 25. По поводу доказательства сходимости дискретных вариационных задач к непрерывным вариационным задачам см. главу 9 книги «Динамическое программирование», где приведены результаты В. Флеминга.

R. Bellman, *Functional equations in the theory of dynamic programming — VI: a direct convergence proof*, Ann. Math., vol. 65, 1957, pp. 215—223.

H. Osborn, *The problem of continuous programs*, Pacific J. Math., vol. 6, 1956, pp. 721—731.

§ 27. Более детальное знакомство с предметом можно получить по упомянутой выше книге Беллмана.

По поводу традиционных методов см.

L. Fox, *The Numerical Solution of Two-point Boundary Problems in Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1957.

L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.

Новый подход, основанный на идее квазилинеаризации, дан в работе:

R. Kalaba, *On nonlinear differential equations, the maximum operation, and monotone convergence*, J. Math and Mech., vol. 8, 1959, pp. 519—574.

Применение к оптике дано в работе:

- R. Kalaba, Dynamic Programming, Fermat's Principle and the Eikonal Equation, Jour. Optical Soc. America, vol. 51, 1961, pp. 1150—1151.

Мы мало сказали о связи между устойчивостью и управлением. Интересные сведения об этих вопросах можно найти в работах:

- T. H a c k e r, Stability of partially controlled motions of an aircraft, J. Aerospace Sci., vol. 28, 1961, pp. 15—26.
R. B e l l m a n, Directions of mathematical research in nonlinear circuit theory, IRE Trans. of Professional Group on Circuit Theory, vol. CT-7, 1960, pp. 542—553.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Для более полного ознакомления с классическим вариационным исчислением можно также рекомендовать книги:

Н. М. Г ю н т е р, Курс вариационного исчисления, Гостехиздат, 1941.

И. М. Г е л ь ф а н д, С. В. Ф о м и н, Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

О связи между классическим вариационным исчислением, принципом максимума Л. С. Понтрягина и динамическим программированием, см.

Л. С. П о н т р я г и н, В. Г. Б о л т я н с к и й, Р. В. Г а м к р е л и д з е, Е. Ф. М и щ е н к о, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

Л. И. Р о з о н о з е р, Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и теломеханика, т. 20, № 10—12, 1959.

В. А. Т р о и ц к и й, О вариационных задачах оптимизации процессов управления, Прикладная математика и механика, т. 26, в. 1, 1962.

В. Ф. К р о т о в, Методы решения вариационных задач на основе достаточного условия абсолютного минимума, Автоматика и теломеханика, № 12, 1962; № 5, 1963.

L. D. B e r c o v i t z, Variational Methods in Problems of control and programming, Journ. of Math. Anal. and Appl., № 3, 1961.
См. также

А. Я. Д у б о в и ц к и й, А. А. М и л ю т и н, Задачи на экстремум при наличии ограничений, Доклады АН СССР, т. 149, № 4, 1963, стр. 759—762.

ГЛАВА VI

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

Торговые и военные применения авиации, научные аспекты создания спутников и волшебные перспективы межпланетных путешествий — все это вместе взятое привело к огромной концентрации внимания на проблеме определения допустимых и оптимальных траекторий. По мере совершенствования технических возможностей самолетов выбор траекторий, дающих минимальное время полета либо максимальную дальность, на основе одной лишь интуиции становится все менее реальным. С другой стороны, вследствие все возрастающего значения сокращения затрат времени в современном обществе и увеличивающейся стоимости топлива, задача определения эффективных режимов работы становится все более существенной. С появлением самолетов, способных совершать полет и вблизи поверхности земли и в стратосфере, и на дозвуковых и на сверхзвуковых скоростях, число возможных типов траекторий становится громадным. Тем самым возрастает и сложность выбора из них оптимальной траектории (оптимальной политики).

Трудности проблемы установления оптимальных траекторий становятся ясными, если принять во внимание, что заманчивая область операций на сверхзвуковых скоростях отделена от дозвуковой области переходной границей, звуковым барьером, который вызывает очень большое лобовое сопротивление. Невозможно ожидать того, чтобы какая-либо простая политика, основанная на одношаговом рассмотрении, позволила бы определить эффективную траекторию полета, которая проникает сквозь этот барьер. Кроме того, явления изменения режима,

связанные с высокоэффективными двигателями, ясно указывают на желательность сверхзвукового полета.

Обращаясь к ракетам и спутникам, напомним тот факт, что каждый фунт полезной нагрузки требует тысяч фунтов топлива. Отсюда следует, что и здесь тщательный выбор траектории является существенным. Необходимо не только старательно рассчитать систему пилотирования и управления, но и соответственно выбрать сам способ управления, который должен быть осуществлен. Этот вопрос мы более детально рассмотрим ниже.

На дальнейших страницах мы будем использовать для изучения множества проблем, возникающих в аэродинамике и процессах управления, динамическое программирование (как стандартными, так и неожиданными способами).

Хотя многие из этих проблем могут быть сформулированы и в терминах вариационного исчисления, мы по причинам, рассмотренным в предшествующей главе, будем для получения численных результатов использовать метод функциональных уравнений.

2. УПРОЩЕННАЯ ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ ТРАЕКТОРИИ

Хотя вычислительный подход динамического программирования уже хорошо знаком читателю, мы чувствуем, что тем

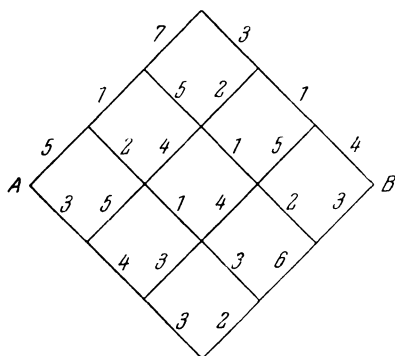


Рис. 63.

не менее стоит затратить время на формулировку и решение простой задачи о выборе оптимального пути. Применимость используемого нами здесь метода станет сразу же очевидной, когда мы рассмотрим задачу о наборе высоты самолетом за минимальное время.

Предположим, что мы желаем найти такой путь, который минимизирует сумму чисел, указанных на каждом из звеньев сетки, изображен-

ной на рис. 63. Движение происходит от точки A к точке B , причем всегда вправо. Рассматривая A как начало координат,

а B как точку с координатами $(0, 6)$, мы построим рекуррентное соотношение

$$f(x, y) = \min \left[\begin{array}{l} d(x, y; x+1, y+1) + f(x+1, y+1) \\ d(x, y; x+1, y-1) + f(x+1, y-1) \end{array} \right],$$

где $d(x, y; x+1, y+1)$ представляет собой число, указанное на звене между точками (x, y) и $(x+1, y+1)$, которое,

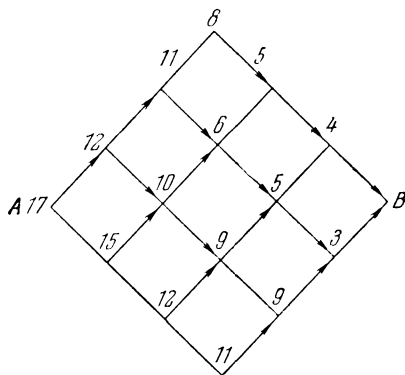


Рис. 64.

как предполагается, представляет расстояние между точками (x, y) и $(x+1, y+1)$. Решая задачу, мы прежде всего заметим, что $f(5, 1) = 4$ и $f(5, -1) = 3$. Используя эти значения для $f(5, y)$, определим $f(4, y)$.

Так,

$$f(4, 2) = 1 + 4 = 5, \quad f(4, 0) = \min \left[\begin{array}{l} 5 + 4 \\ 2 + 3 \end{array} \right] = 5$$

и

$$f(4, -2) = 6 + 3 = 9.$$

Заметим также, что из $f(4, 0)$ оптимальный выбор заключается в движении по диагонали вниз. Аналогичным образом мы вычисляем $f(3, y)$, $f(2, y)$, $f(1, y)$ и, наконец, $f(0, 0)$. Решение со стрелками, указывающими оптимальные направления, сведено в таблицу, приведенную на рис. 64.

3. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

В предшествующем параграфе мы определяли $f(x, y)$ как минимальную сумму расстояний от точки (x, y) до конечной точки. Это приводит к итеративному методу, использующему движение обратно, от конечной точки. Однако мы

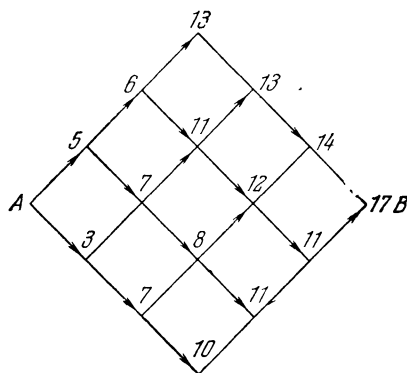


Рис. 65.

могли бы точно так же ввести иную функцию $g(x, y)$, определяемую как минимальная сумма при движении от начальной точки к (x, y) . Это привело бы к итерации в прямом направлении, дающей решение, представленное на рис. 65. Здесь стрелки должны быть интерпретированы как указатели направления, из которого осуществляется приход в точку. Оба варианта, как это и должно было быть, приводят к идентичному

результату по выбору наилучшего пути от A к B и по найденной минимальной сумме. Эту двойственность подходов необходимо иметь в виду при последующем рассмотрении.

4. ЗАДАЧА О НАБОРЕ ВЫСОТЫ ЗА МИНИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Рассмотрим следующую задачу: какова траектория полета (в плоскости обобщенных координат высота — скорость), минимизирующая время, требуемое для подъема самолета с начальной высоты H при начальной скорости V до заданной конечной высоты H_F и скорости V_F . Уравнение движения *),

*) Уравнения (6.1) эквивалентны более очевидным соотношениям

$$W \frac{dV}{dt} = g(T - D) - W_g \sin \theta, \quad \frac{dH}{dt} = V \sin \theta.$$

Здесь W — масса самолета. При записи этих соотношений мы пренебрегли отличием между углом тангажа и углом наклона траектории. (Прим. ред.)

выведенное при предположениях квазистационарности, имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\frac{V}{\bar{W}}(T-D)}{1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dH}} = V \sin \theta, \quad (6.1)$$

где тяга T является функцией только высоты H и скорости V , так как мы предполагаем, что установка регулятора тяги фиксирована. Для простоты в этом примере мы предположим, что лобовое сопротивление D также является функцией H и V , пренебрегая тем самым изменением сопротивления, вызванным изменением наклона траектории и нормальным ускорением. Ограничимся также только траекториями, не включающими маневров типа «горок» и пикирования. Более точное решение, при котором лобовое сопротивление рассматривается как функция H , V , угла наклона траектории θ и $\dot{\theta}$, и не включающее никаких искусственных ограничений на допустимые траектории, также возможно с помощью динамического программирования и будет дано в § 9.

5. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основное уравнение динамического программирования для задачи о наборе высоты за минимальное время имеет вид

$$f(H, V) = \min [t(H, \Delta H, V, \theta) + \\ + f(H + \Delta H, V + \Delta V[H, \Delta H, V, \theta])]. \quad (6.2)$$

В этом уравнении $f(H, V)$ представляет минимальное время подъема от начального положения H, V до заданных конечных H_F и V_F . Выражение $t(H, \Delta H, V, \theta)$ определяет время подъема до высоты $H + \Delta H$ с углом подъема θ . Уравнение (6.2) устанавливает тот очевидный факт, что полное время набора высоты представляет собой сумму

(а) времени подъема с углом θ до некоторой близкой высоты,

(б) минимального времени подъема из нового положения до конечной точки, минимизируемого по всем возможным углам. Это уравнение будет основным в нашем аналитическом и вычислительном рассмотрении.

6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Подставляя выражение из (6.1) в (6.2), получим уравнение

$$f(H, V) = \min_0 \left[\frac{\Delta H}{V \sin \theta} + f \left(H + \Delta H, V + \left[\frac{\frac{g}{W}(T-D)}{V \sin \theta} - \frac{g}{V} \right] \Delta H \right) \right]. \quad (6.3)$$

Разлагая выражение в правой части в степенной ряд вблизи точки (H, V) , приходим к новому уравнению

$$f(H, V) = \min_0 \left[\frac{\Delta H}{V \sin \theta} + f(H, V) + \Delta H \frac{\partial f}{\partial H} + \left[\frac{\frac{g}{W}(T-D)}{V \sin \theta} - \frac{g}{V} \right] \Delta H \frac{\partial f}{\partial V} + o(\Delta H) \right], \quad (6.4)$$

где $o(\Delta H)$ представляет собой слагаемое высшего порядка малости относительно ΔH .

В силу того, что $f(H, V)$ в правой и левой частях взаимно уничтожаются, мы получим, разделив на ΔH и устремляя ΔH к нулю, равенство

$$0 = \min_0 \left[\frac{1}{V \sin \theta} + \frac{\partial f}{\partial H} + \frac{\frac{g}{W}(T-D)}{V \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial V} - \frac{g}{V} \frac{\partial f}{\partial V} \right]. \quad (6.5)$$

Рассмотрение этого уравнения приводит к трем случаям:

(а) Если $1 + \frac{g}{W} \left(T - D \right) \frac{\partial f}{\partial V} > 0$, необходимо

выбирать $\sin \theta$ столь большим, сколь возможно.

(б) Если $1 + \frac{g}{W} \left(T - D \right) \frac{\partial f}{\partial V} < 0$, выбирать $\sin \theta = 0$. (6.6)

(в) Если $1 + \frac{g}{W} \left(T - D \right) \frac{\partial f}{\partial V} = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial V} (TV - DV) = \frac{V}{g} \frac{\partial}{\partial H} (TV - DV).$$

Уравнение для случая (в) мы выводим, исключая $\frac{\partial f}{\partial H}$ и $\frac{\partial f}{\partial V}$ и пользуясь тем, что уравнение (6.5) остается справедливым.

Далее составляются и приравниваются смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial H \partial V}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial V \partial H}$. Полученное уравнение определяет траекторию в плоскости (H, V) . Теперь мы можем сделать заключение, что оптимальная траектория состоит из основной кривой, не зависящей от конечных точек, а также переходных участков, на которых совершается либо горизонтальный полет, либо полет с наибольшим углом наклона траектории.

Прямое решение уравнений типа (6.5) приводит ко многим трудностям. В настоящее время только процедура проб и ошибок позволяет прийти к точной комбинации эйлеровых траекторий и переходных кривых, хотя в специальных случаях могут быть использованы и аналитические методы.

7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Обратимся теперь к рассмотрению вычислительных аспектов задачи о наборе высоты. Предположим, что желательно пролететь от точки 1 до точки 2 (рис. 66) за минимальное время. Мы можем представлять себе плоскость (H, V) как сетку из элементов произвольных размеров. Ограничимся только горизонтальными и вертикальными приращениями, соответствующими шагу сетки. С физической точки зрения мы ограничиваемся движениями самолета с приращением высоты на постоянной скорости и ускорениями на постоянной высоте. Линейность нашего «вырожденного» квазистационарного уравнения позволяет сделать это.

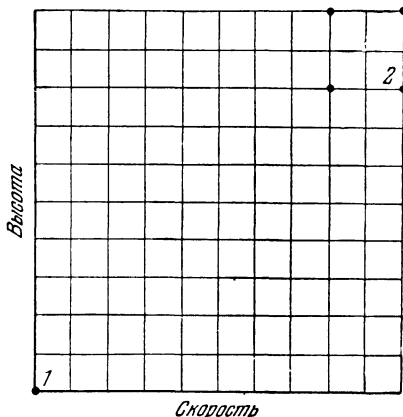


Рис. 66. Сетка скорость — высота.

Мы можем теперь попытаться осуществить прямой подход к решению, т.е., начиная из точки 1, испытать все возможные пути и найти путь, требующий минимального времени, путем исключения. Этот «метод грубой силы»

обременителен по времени даже для вычислительной техники; например, сетка размером 10×10 для испытания всех возможных путей требует 875 000 отдельных просчетов. Вместо этого мы используем метод, описанный в § 2. Построим вспомогательную матрицу со следующими свойствами:

1) оптимальный путь от любой точки до конечной точки 2 задается следованием по пути, указанному стрелками;

2) численные значения времени, затрачиваемого на оптимальный путь от любой точки, указывается числом в таблице.

Для построения такой матрицы потребуется лишь малое число просчетов. Например, для сетки 10×10 необходимо 180 вычислений по сравнению с 875 000 для «метода грубой силы».

8. ОБРАЗЕЦ РАСЧЕТА

Для того чтобы показать численные результаты, получающиеся при применении динамического программирования к задаче о наборе высоты за минимальное время, был выбран гипотетический турбореактивный самолет-перехватчик с возможной высотой полета 60 000 футов и скоростью $M = 2$.

Мы предполагаем, что читатель знаком с обычной терминологией авиационной техники *).

Предположение, что поляра является параболической, и использование уравнений движения приводят к следующим выражениям:

$$C_D = C_{D_0} + KC_L^2, \quad (6.7)$$

$$C_L = \frac{NW}{q^s}, \quad (6.8)$$

$$N = \cos \theta + \frac{V^2}{g} \theta' \sin \theta, \quad (6.9)$$

$$q = 1481 \delta_{am} M^2 = 1481 \delta_{am} \left(\frac{V}{V_s} \right)^2. \quad (6.10)$$

Для подъема с $M = \text{const}$ имеем:

$$\Delta t = \frac{\Delta H \left(1 + \frac{V}{g} \frac{\Delta V}{\Delta H} \right)}{\frac{V}{W} (T - D)}. \quad (6.11)$$

*) При переводе сохранены обозначения оригинала. Связь их с принятыми в СССР стандартными обозначениями ясна из текста. (Прим. ред.)

Для ускорения при $H = \text{const}$ имеем:

$$\Delta t = \frac{\frac{W}{g} \Delta V}{T - D}. \quad (6.12)$$

Здесь C_{D0} и K — параметры уравнения поляры, связывающего коэффициенты лобового сопротивления C_D и

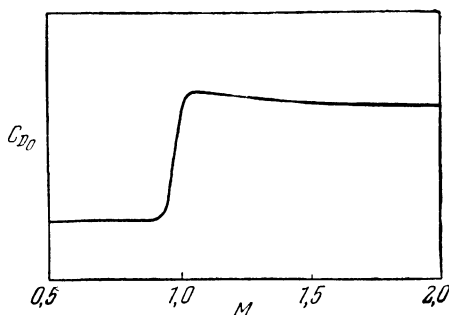


Рис. 67. Зависимость коэффициента C_{D0} от числа M .

подъемной силы C_L , являются функциями числа M . Графики их даны на рис. 67 и 68. Доступная тяга как функция высоты и скорости, если установка регулятора фиксирована, показана на рис. 69.

Мы произведем построение матрицы (H, V) , для которой выберем $\Delta H = 1000$ футов и $\Delta M = 0,02$. Начальная точка имеет координаты $(H=0, M=0,8)$, а конечная $(H=60\,000, M=2,0)$, что приводит к матрице размера 61×61 .

(Вообще говоря, нет необходимости в том, чтобы матрица была квадратной.) Вторая таблица (сетка), аналогичная построенной

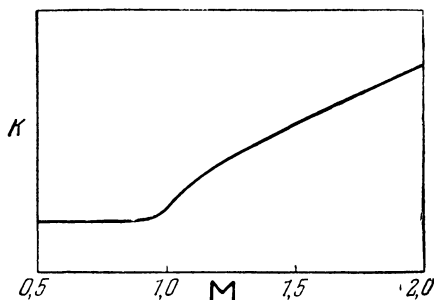


Рис. 68. Зависимость коэффициента K от числа M .

в предшествующем примере, была получена с помощью быстродействующей вычислительной машины и были определены

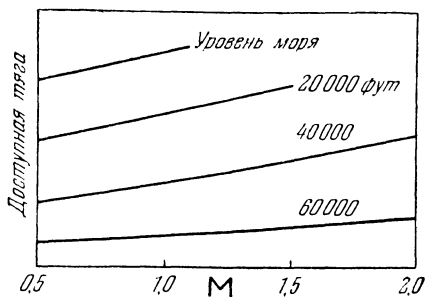


Рис. 69. График доступной тяги.

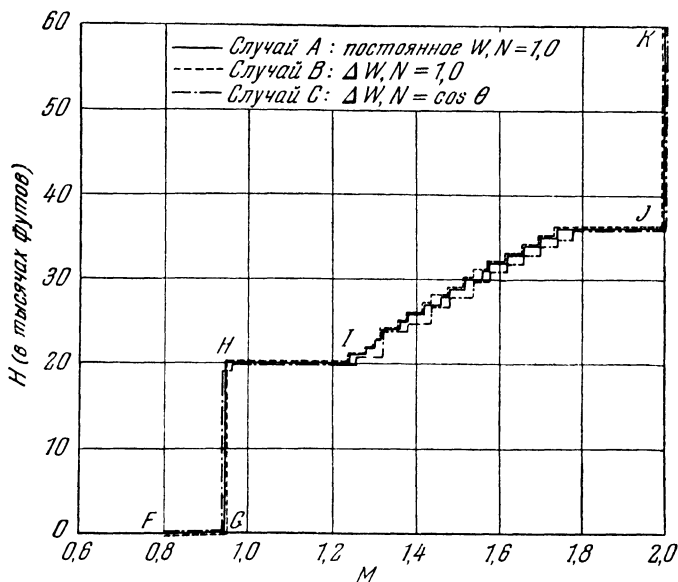


Рис. 70. График оптимального пути в координатах высота — скорость.

оптимальные траектории для нескольких случаев. Результаты показаны на рис. 70—72.

Рассматривая рис. 70, можно легко узнать общее решение описанного выше типа. Части траектории GH и IJ являются

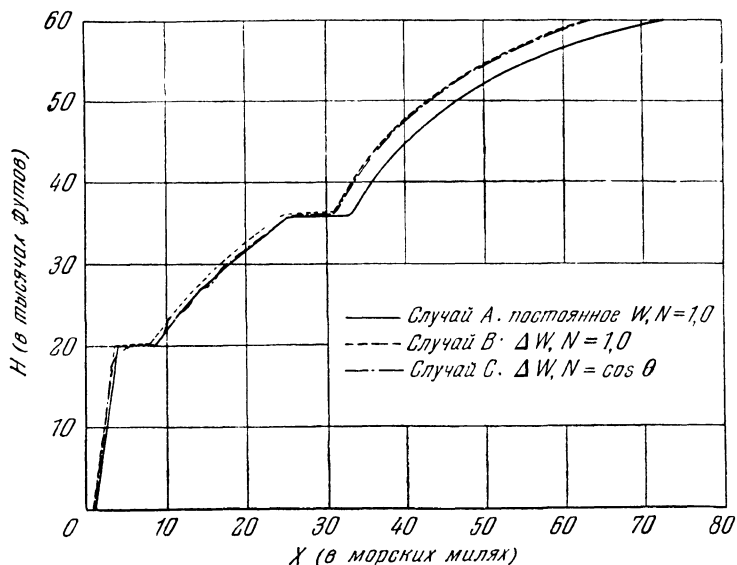


Рис. 71. График оптимального пути в координатах высота—горизонтальная дальность.

двумя ветвями эйлеровой траектории. Часть FG есть переход от стартовой точки до дозвуковой эйлеровой траектории. Часть HI есть переход между дозвуковой и сверхзвуковой ветвями эйлеровой траектории. Часть JK есть переход от сверхзвуковой ветви эйлеровой траектории к конечной точке.

В случае А (рис. 70) принято, что вес самолета (вместе с топливом) остается постоянным и равным 40 000 фунтов и что коэффициент перегрузки N равен единице. Время набора высоты по оптимальной траектории оказалось равным 277 секундам.

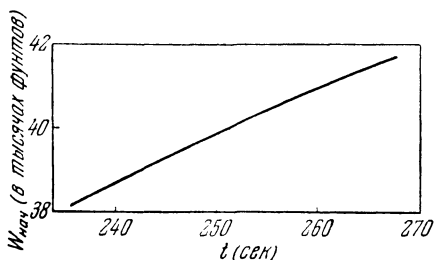


Рис. 72. Зависимость минимального времени набора высоты от начального веса.

В случае *B* эффект изменения веса вдоль траектории учитывался путем введения зависимости удельного расхода топлива от высоты и скорости.

Так как при построении второй таблицы мы движемся в обратном направлении, то приходится начинать расчет с некоторого предполагаемого значения веса в конце траектории и вычислять его приращения при движении по таблице. Интересным побочным результатом расчетов являются, конечно, данные о зависимости времени набора высоты от начального веса.

При начальном весе, равном 40 000 фунтов, время подъема составляет 252 секунды, а затраты топлива 3450 фунтов.

В случае *C* исследовался эффект влияния угла наклона траектории на лобовое сопротивление самолета. Влиянием нормальных ускорений на лобовое сопротивление пренебрегалось. Использованный метод расчета аналогичен итерационному процессу, примененному при учете влияния изменений веса. Время набора высоты в случае *C* оказалось равным 251 секунде.

Замечено, что изменение лобового сопротивления, вызванное нормальными ускорениями, является важным, особенно в переходных точках, таких как выравнивание от первоначального угла наклона к горизонтальному ускорению. Общее решение, учитывающее этот эффект, можно получить распространением описанного здесь метода (см. § 9).

На рис. 71 показан профиль полета (траектория в координатах высота — горизонтальная дальность) для трех исследованных случаев, где приращение горизонтальной дальности для малых Δt вычислялось как произведение Δt на горизонтальную компоненту средней скорости. На рис. 72 приведен полезный график, который является побочным результатом вычислительной методики, использованной в случае *B*.

Что касается практического приложения этих теоретических результатов, то было бы слишком оптимистичным ожидать, что человек или автопилот мог бы следовать такой сложной программе подъема по высоте и скорости, какая была здесь указана.

К счастью, можно найти более практическую траекторию, состоящую из двух участков подъема с постоянным числом *M* и одного участка разгона на постоянной высоте, которая, с точки зрения затрат времени, близка к сложной траектории,

найденной в примере. Следовательно, теоретическое решение должно служить как бы проводником и критерием оценки при нахождении практически приемлемых траекторий с минимальными затратами времени.

9. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА О НАБОРЕ ВЫСОТЫ

Задача о наборе высоты за минимальное время, рассмотренная в предшествующих параграфах, может быть записана в форме, значительно точнее отражающей действительность, если учесть некоторые дополнительные факторы. В частности, кажется, что:

- 1) необходимо учесть зависимость лобового сопротивления от наклона траектории и нормального ускорения;
- 2) нормальные ускорения должны быть ограничены допустимыми для пилота и прочности самолета нагрузками;
- 3) должны быть разрешены пикирование и «горки»;
- 4) должна быть задана предельная дальность полета.

Учет данных факторов не выходит за пределы возможностей нынешней вычислительной техники. Однако он потребует значительных усилий при программировании и вычислениях. В идеале для инженеров-проектировщиков и эксплуатационников должны быть доступны как быстрый и легкий метод первого приближения, подобный описанному выше, так и более сложное решение, рассмотренное ниже.

Влияние наклона траектории и нормальных ускорений на лобовое сопротивление отражается введением в формулу переменных θ и $\dot{\theta}$. Это приводит к двумерной задаче. Ограничения на ускорения определяют границы изменения $\dot{\theta}$. Программирование $\dot{\theta}$ эквивалентно программированию угла атаки. Для того чтобы включить пикирование, т. е. увеличение скорости при потере высоты, и «горку», увеличение высоты с потерей скорости, необходимо ввести новую монотонно изменяющуюся промежуточную переменную. Эта переменная — энергетический уровень, определяемый как

$$E = H + \frac{1}{2g} V^2. \quad (6.13)$$

Для всех разумных траекторий эта переменная будет увеличиваться при полете с включенным двигателем, хотя высота и скорость по отдельности могут колебаться. Заметим, что

при этом не вводится никаких дополнительных переменных, так как знание E и H позволяет определять V с помощью соотношения (6.13). Наконец, предельная дальность полета S может быть задана путем введения постоянного множителя Лагранжа, который экспериментально определяется при игративном решении.

С этими дополнениями рекуррентное соотношение приобретает вид

$$f_E(H, \theta) = \min_{a \leq \frac{d\theta}{dE} \leq b} \left[\frac{dt}{dE} \Delta E + \lambda \frac{ds}{dE} \Delta E + f_{E+\Delta E} \times \right. \\ \left. \times \left(H + \frac{dH}{dE} \Delta E, \theta + \frac{d\theta}{dE} \Delta E \right) \right], \quad (6.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{V}{W} (T - D), \\ \frac{ds}{dE} &= \frac{W \cos \theta}{T - D}, \\ \frac{dH}{dE} &= \frac{W \sin \theta}{T - D} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

и

$$\left. \begin{aligned} T &= T(E, H), \\ D &= D(E, H, \theta, \dot{\theta}), \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

а ограничения по нагрузкам в уравнении (6.14) заданы в форме

$$a = a(E, H, \theta), \quad b = b(E, H, \theta). \quad (6.17)$$

Численное решение, как это часто отмечалось выше, включает последовательное вычисление ряда таблиц значений функции двух переменных.

10. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИИ СПУТНИКА

В последующих параграфах мы хотим изучить задачу о выведении спутника на орбиту. Так как вопрос является весьма сложным, изучим упрощенный вариант. Проблема представляет интерес как с аналитической, так и с вычислительной точек зрения.

Аналитически это вариационная задача типа Майера, в которой одна из переменных (горизонтальная скорость) должна

быть максимизирована в момент полного выгорания топлива, причем имеются некоторые ограничения. Если режим тяги обуславливается заранее или является постоянным, то для решения применима методика предшествующей главы. Если величина тяги, которая входит в уравнение линейно, должна быть выбрана оптимальной при некоторых ограничениях, то аналитический подход затрудняется, но вычислительный алгоритм динамического программирования еще приложим.

11. УПРОЩЕННАЯ ЗАДАЧА

Нашей целью является выбор закона (политики) управления тягой и расходования топлива, который позволит вывести спутник на орбиту с заданной высотой при максимальной горизонтальной компоненте скорости.

Для того чтобы ограничить объем вычислений разумными пределами, мы воспользуемся существенными упрощениями, к которым приводят пренебрежение различными аэродинамическими силами и предположение о том, что земное поле тяготения является плоскопараллельным.

Определение траекторий, обеспечивающих минимум расхода топлива, максимум высоты и т. п., может быть проведено теми же приемами, которые были использованы в предшествующем рассмотрении.

Аналогично при помощи тех же методов могут быть рассчитаны более реальные траектории при учете сферичности поля тяготения, — при этом придется привлекать функции двух или более переменных.

12. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Уравнения движения спутника, перемещающегося над плоской землей, записываются в декартовой системе координат следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= p \cos \varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= p \sin \varphi - g, \\ \frac{dy}{dt} &= w, \\ \frac{dx}{dt} &= u. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Здесь (см. рис. 73):

- | | | |
|-----|---|----------|
| (a) | x и y — как обычно, горизонтальная и вертикальная компоненты, | } (6.19) |
| (b) | u и w — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, | |
| (c) | p — величина ускорения, создаваемого реактивными силами, | |
| (d) | φ — угол наклона силы тяги к горизонту. | |

Если мы введем величину V как скорость, достигаемую спутником в идеальном случае отсутствия гравитационных сил, то получим соотношение

$$\frac{dV}{dt} = -p. \quad (6.20)$$

Переменная V будет **монотонной функцией количества топлива**. Так как

$$p = \frac{gP}{M}, \quad (6.21)$$

где P — тяга, и

$$P = -\frac{c}{g} \frac{dM}{dt}, \quad (6.22)$$

где M — вес и c — скорость вытекающих газов, мы сможем

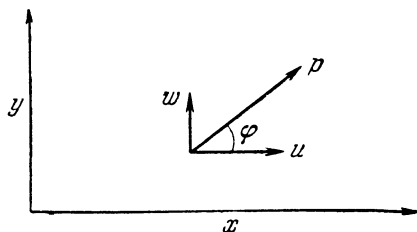


Рис. 73.

найти M как функцию «идеально достижимой» скорости V :

$$M = M_e e^{V/c}, \quad (6.23)$$

где M_e — вес пустой ракеты.

Уравнения движения (6.18) совместно с соотношениями (6.23), которые задают M как функцию V , и (6.21), которое

определяет ускорение через тягу и вес, позволяют определить оптимальный наклон и оптимальную величину тяги как функцию V .

13. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Если p постоянно, то метод предшествующей главы приводит к важному заключению, что оптимальная политика, $\bar{\varphi}$, характеризуется тем свойством, что

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tg} \bar{\varphi} = \lambda, \quad (6.24)$$

где $\lambda = \text{const.}$

14. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ — I

Рассмотрим теперь, как мы сможем использовать метод функциональных уравнений динамического программирования для получения численного решения.

Переменными состояниями являются высота y , вертикальная компонента скорости w и идеальная доступная скорость V . Следовательно, мы вводим функцию

$f(V, w, y)$, равную добавочной горизонтальной скорости, полученной при старте с высоты y с вертикальной компонентой скорости w и идеальной (6.25) доступной скоростью V , при использовании оптимальной политики.

Обращаясь к уравнениям движения, введенным в § 12, и используя принцип оптимальности, мы получим функциональное уравнение

$$\begin{aligned} f(V, w, y) = \max_{\varphi, p} & \left[\cos \varphi \Delta V + f \left(V - \Delta V, w + \frac{dw}{dV} \Delta V, y + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{dy}{dV} \Delta V \right) \right] = \max_{\varphi, p} & \left[\cos \varphi \Delta V + f \left(V - \Delta V, w + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\sin \varphi - \frac{M_e e^{V/c}}{p} \right) \Delta V; \quad y + \frac{w M_e e^{V/c}}{gP} \Delta V \right) \right], \quad (6.26) \end{aligned}$$

где ΔV рассматривается как малая величина. Считая V принимающим только конечный ряд значений $0, \Delta V, 2\Delta V, \dots, N\Delta V$,

мы видим, что вычисления сводятся к определению последовательности функций двух переменных $f_N(\omega, y) \equiv f(N\Delta, \omega, y)$ при использовании уравнения (6.26).

15. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ — II

Для того чтобы упростить вычисления, используем метод множителей Лагранжа, позволяющий, как это было показано в § 16 главы II, привести задачу к определению последовательности функций одной переменной.

Вместо минимизации окончательного значения u , ограниченного заданием высоты и ω в конце траектории, рассмотрим проблему максимизации суммы

$$-\int_{V_0}^0 \cos \varphi dV + \lambda \int_{V_0}^0 \frac{dy}{dV} dV \quad (6.27)$$

при выполнении уравнений движения. Здесь λ — множитель Лагранжа.

Новое функциональное уравнение для максимальной величины имеет вид

$$\begin{aligned} f(V, \omega) = \max_{\varphi, P} \left\{ \cos \varphi \Delta V + \frac{\lambda \omega M_e e^{V/c}}{gP} \Delta V \right\} + \\ + f\left(V - \Delta V, \omega + \left(\sin \varphi - \frac{M_e e^{V/c}}{P}\right) \Delta V\right) \lambda \omega \Delta t + \\ + f(V, \omega - g \Delta t) \}, \quad (6.28) \end{aligned}$$

где вторая альтернатива внутри $\{ \}$ представляет решение на границах для малого временного интервала Δt .

Параметр λ настраивается вплоть до выхода на ограничение по высоте. При использовании множителя Лагранжа мы разделяем задачу, первоначально включавшую последовательность функций двух переменных, на ряд задач, включающих функции одной переменной. Время вычислений значительно уменьшается.

16. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное решение находится путем обратной итерации рекуррентного соотношения (6.28) от известных окончательных величин. До начала вычислений заметим, что если выгорание топлива произойдет при вертикальной компоненте скорости w , то приращение высоты будет равно $w^2/2g$ и приращение горизонтальной скорости равно нулю. Следовательно, $f(0, w) = \lambda w^2/2g$. Таблица, содержащая $f(0, w)$ для диапазона значений w (мы еще не знаем, к какой величине w в момент выгорания приводит оптимальная политика), сохраняется в оперативной памяти вычислительной машины. Эта табулированная функция теперь используется для определения новой функции $f(\Delta V, w)$, равной полной добавочной горизонтальной скорости плюс λ , умноженное на высоту, которая может быть достигнута, начиная с малой величины ΔV «располагаемой скорости», т. е. топлива, и вертикальной компоненты скорости w . Это вычисление производится с помощью уравнения (6.28). Мы оцениваем приращение, связанное с выбором различных φ и P , и сравниваем его с доходом от решения на ограничении. На этой основе мы выбираем оптимальное решение.

Результаты этого решения, т. е. значения $f(\Delta V, w)$ для ряда рассмотренных значений w , хранятся в памяти машины.

Во второй таблице приводится оптимальное решение для $f(\Delta V, w)$.

В третьей таблице $I(\Delta V, w)$ записывается полная высота, получаемая при использовании оптимальной политики, начинающейся с точки $(\Delta V, w)$. В этой таблице ведется запись величины, которая не используется при вычислениях, но зато сразу же по окончании итерации уравнения (6.28) дает значения полной высоты (а значит, и горизонтальной скорости $f(V, 0) - \lambda I(V, 0)$), получаемой при следовании по оптимальной траектории. Удобство этой записи объясняется тем, что при полете мы стремимся максимизировать сумму горизонтальной скорости и высоты, умноженной на λ . После того как описанный выше метод для вычисления $f(\Delta V, w)$ с использованием таблиц значений $f(0, w)$ запрограммирован на быстродействующей вычислительной машине, вычисление значений $f(2\Delta V, w)$ по $f(\Delta V, w)$ и, наконец, $f(V, w)$ по $f(V - \Delta V, w)$ нетрудно осуществить с помощью той же

самой программы. Заметим, что на каждом этапе этих вычислений для построения следующей таблицы требуется только предшествующая таблица функций f . Как только таблица вычислена и использована для построения следующей, она может быть отпечатана выходным устройством вычислительной машины и изъята из памяти. Следовательно, требуемая емкость памяти машины определяется числом дискретных точек, выбранных для таблицы ω , и не зависит от шага сетки по ΔV . Полное время счета обратно пропорционально величине шага ΔV .

При выполнении обратной итерации по уравнению (6.28) известны горизонтальная скорость и высота, получаемые при оптимальной политике для определенных начальных условий. Начальная политика для точки старта также определяется природой вычислений $f(V, \omega)$.

Для того чтобы восстановить оптимальную траекторию во всей ее полноте, теперь определяется новое значение ω с помощью предписанного решения для первого интервала ΔV .

При вычислении $f(V - \Delta V, \omega)$ для этого значения ω определяется и записывается оптимальное решение (так как действительное ω может не быть одной из точек сетки ω , то иногда оказывается необходимой интерполяция). Это решение используется далее на интервале от $V - \Delta V$ до $V - 2\Delta V$. Таким способом мы используем результаты вычислений в порядке, обратном тому, в котором они были получены. Приведенная выше операция может быть легко осуществлена с помощью вычислительной машины как конечный этап вычислений, если набор таблиц записан на магнитной ленте или на перфокартах.

Как только задача решена, проверяется значение конечной высоты для того, чтобы определить, достигнут ли требуемый уровень. Затем вычисляется новое значение множителя Лагранжа λ на основании предшествующего значения и полученных результатов и все вычисления повторяются.

Вычисления дают оптимальную траекторию, выраженную через горизонтальную скорость и λ (высоту) для широкого диапазона начальных значений вертикальной компоненты скорости. Это множество результатов представляет интерес в задачах, где начальное значение вертикальной скорости не обязательно задано и желательно получить ответы для некоторого диапазона значений.

Во-вторых, после ряда изменений λ оказываются известными оптимальные траектории для различных высот, что дает интересную оценку компромиссного выбора между высотой и скоростью на оптимальных траекториях.

17. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При всех вычислениях мы рассматривали гипотетическую ракету со следующими характеристиками: вес пустой ракеты $M_e = 6000$ фунтов; скорость истечения $c = 11\,000$ *фут/сек*; максимальная тяга $P_{\max} = 300\,000$ фунтов, минимальная тяга при включенном двигателе $P_{\min} = 50\,000$ фунтов, полная идеально возможная скорость $30\,000$ *фут/сек*.

Эти данные подразумевают, что полный вес на старте равен 76 456 фунтов. Значение $\lambda = 0,00142$ приводит к окончательной высоте, равной приблизительно 450 миль с горизонтальной скоростью на этой высоте, равной 26 300 *фут/сек*.

Были приняты следующие значения различных параметров и шагов сетки, требуемых для численного решения:

1) $\Delta V = 1000$. Следовательно, рекуррентное соотношение итерировалось 30 раз.

2) $\Delta w = 50$. Каждая таблица для $f(V, w)$ содержала 281 число, так как диапазон изменения w был принят от 0 до 14 000.

3) $\Delta \varphi = 0,01$ радиана. Диапазон изменения углов тяги $(0, \pi/2)$ радиан.

4) Тяга могла принимать значения 300 000, 250 000, 200 000, 150 000, 100 000 или 50 000.

Эти числа были определены экспериментально. Они обладают тем свойством, что дальнейшее изменение сетки оказывает малое или вообще незаметное влияние на вычисляемое решение.

Сжатая сводка результатов решения, осуществленного на машине РАНД Джонниак за 20 минут, дана в таблице 6.1.

Необходимо отметить, что, хотя при таком упрощенном изучении обнаруживается, что ракета должна лететь на максимальной тяге вплоть до полного выгорания топлива, а направление тяги должно изменяться по простому закону, сама вычислительная схема не строилась в предположении этих результатов. Она, следовательно, приложима и для более общих

задач, решение которых недоступно для обычного математического анализа.

Таблица 6.1

V (тыс. $\phi\text{ум/сек}$)	Вес (фунт)	h ($\phi\text{ум}$)	w ($\phi\text{ум/сек}$)	n ($\phi\text{ум/сек}$)	φ (рад)	P (тыс. фунтов)	Время (сек)
30	76 456	0	0	0	0,560	300	0
25	48 529	16 045	1 514	4 279	0,523	300	33,3
20	30 803	57 720	3 306	8 625	0,501	300	54,4
15	19 552	106 344	5 259	13 020	0,496	300	67,8
10	12 410	152 954	7 330	17 436	0,480	300	76,3
5	7 877	192 848	9 464	21 871	0,480	300	81,7
Выгорание топлива	5 000	224 920	11 650	26 313	0,472	300	85,1
Конец подъема	5 000	2 337 679	0	26 313	0	0	444,7

Интересно отметить точность этих вычислений путем сравнения отклонений $\lg \varphi$ от выведенного выше оптимального линейного закона.

С помощью метода наименьших квадратов мы приблизим зависимость $\lg \varphi$, полученную выше, линейной $\lg \varphi(t) = \alpha + \beta t$, где $\alpha = 0,623945$ и $\beta = -0,001336$, и построим таблицу 6.2.

Таблица 6.2

t	$\varphi(t)$	$\lg \varphi(t)$	$\lg \bar{\varphi}(t)$	$ \lg \varphi - \lg \bar{\varphi} $
0	0,560	0,6269	0,6239	0,0030
33,3	0,523	0,5795	0,5795	0,0029
54,4	0,503	0,5476	0,5513	0,0037
67,8	0,490	0,5334	0,5334	0,0000
76,3	0,480	0,5206	0,5220	0,0044
81,7	0,480	0,5206	0,5148	0,0058
85,1	0,472	0,5093	0,5103	0,0010

18. БЛОК-СХЕМА

Программа вычислений показана в виде диаграммы на рис. 74.

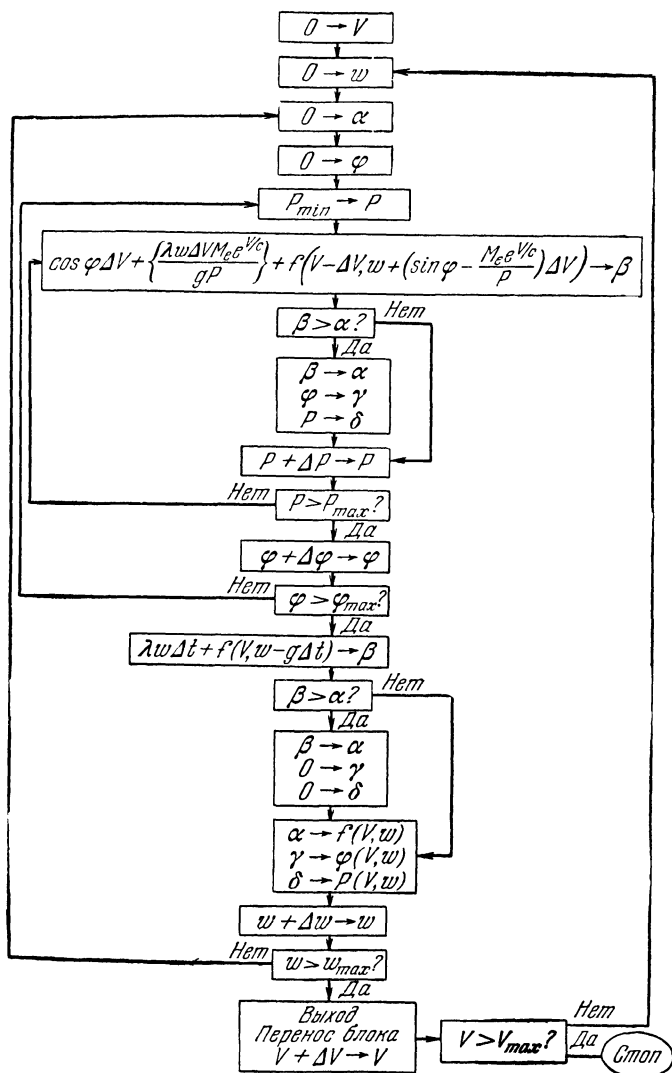


Рис. 74.

19. НОВОЕ ПОНЯТИЕ УПРАВЛЕНИЯ

Понятие параметров состояния в динамическом программировании естественно приводит к новому подходу в пилотировании и в управлении с обратной связью вообще.

При старом вариационном подходе для любой данной задачи целью является определение уравнения наилучшей траектории. Естественно, что это приводит к идее пилотирования, основанной на предварительном вычислении желаемой траектории и настройке навигационного вычислительного устройства на эту траекторию.

Если снаряд отклонится от траектории под действием непредвиденных сил или мелких неисправностей, механизм обратной связи почувствует это отклонение и попытается вернуть снаряд на предписанный путь. Использование такого устройства приводит к трудностям, связанным с обеспечением устойчивости, а иногда с действительной опасностью увеличения колебаний вследствие перерегулирования.

Все эти трудности автоматически устраняются введением параметров состояния. Как только ракета отклонилась, оптимальной будет уже не вычисленная ранее траектория, а новая, определяемая новым состоянием ракеты. Любая попытка вернуть ракету на прежнюю траекторию не только трудно выполнима, но и в действительности, вообще говоря, неоптимальна. Истинная информация, необходимая для выполнения оптимальных действий, — оптимальное решение как функция всех возможных мыслимых состояний системы, — определяется при вычислениях по методу динамического программирования. Введение этой информации в систему пилотирования позволит найти легко осуществимые с летной точки зрения истинно оптимальные траектории. Проблема технической реализации этой идеи еще мало изучена.

20. МНОГОСТУПЕНЧАТЫЕ РАКЕТЫ

Здесь мы будем рассматривать совершенно иной тип многошаговых задач, выдвинутых космическим веком. Само наименование показывает, что к проблемам, касающимся оптимального построения многоступенчатых ракет, удобно подойти с позиций динамического программирования. Для того чтобы проиллюстрировать приложимость этой методики, выберем следующую задачу.

21. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗДЕЛЕНИИ

Рассмотрим задачу об определении надлежащего числа и размеров двигательных ступеней, возникающую при проектировании ракет. Как известно читателю любой нынешней ежедневной газеты, современные ракеты-носители спутников и космические корабли строятся из нескольких секций с горючим. После того как топливо, содержащееся в секции, израсходуется, корпус секции отделяется, для того чтобы уменьшить общий вес. В идеале было бы желательно иметь бесконечно ступенчатую ракету, вся излишняя часть оболочки которой непрерывно бы отпадала по мере расходования топлива. Однако это приводит к бесконечно большому количеству измерительной и управляющей аппаратуры, а следовательно, к весьма высокой вероятности неисправностей. Согласимся, что желательно использовать разумно малое число ступеней. Тогда встает вопрос о размещении топлива в них. Таков упрощенный вариант задачи, которую мы будем здесь рассматривать.

Мы попытаемся определить количество топлива, которое должно быть помещено в каждую из ступеней k -ступенчатой ракеты, для того чтобы придать носовому конусу и полезной нагрузке заданную конечную скорость. При этом распределение надо осуществить так, чтобы минимизировать полное количество топлива, т. е. начальный вес. Мы хотим решить эту задачу для k -ступенчатой ракеты, где k принимает значения 1, 2, 3, ..., N . Весь этот ряд задач может быть решен за один цикл вычислений при динамическом программировании. Выбор оптимального k может быть осуществлен на базе компромисса между весом и надежностью.

22. ФОРМУЛИРОВКА

Мы желаем минимизировать вес, необходимый для достижения заданной скорости, в предположении, что траектория известна. Одной из переменных, необходимых для описания состояния ракеты в начале этапа, является достигнутая скорость или, что эквивалентно, остающаяся доля скорости, которая должна быть достигнута с помощью последующих ступеней.

Необходимо также знать вес ракеты для того, чтобы рассчитать работу в течение данного этапа. Все другие данные, необходимые для вычисления функционирования в течение этапа, предполагаются заранее известными, независимыми от вычисляемой конфигурации ракеты. Так как критерием оптимизации является минимум веса, необходимого для достижения конечной скорости, а оптимальный вес ракеты при данной скорости есть именно тот, который необходим для достижения конечной скорости, то значение оптимизируемой функции (т. е. веса) на данном этапе и значение переменной состояния (т. е. скорости) определяют функционирование в течение этапа.

Переходя к аналитической формулировке, определим

$$f_k(v) \text{ как минимальный вес } k\text{-ступенчатой ракеты, достигавшей конечной скорости } v. \quad (6.29)$$

Теперь, если v_k есть еще не найденная скорость, которая добавится за время действия k -й ступени, а функция $w[v_k, f_{k-1}(v - v_k)]$ есть добавочный вес топлива и корпуса, необходимый для обеспечения этого приращения, то в силу принципа оптимальности имеет место рекуррентное соотношение

$$f_k(v) = \min_{v_k} \{w[v_k, f_{k-1}(v - v_k)] + f_{k-1}(v - v_k)\}. \quad (6.30)$$

Природа функции w является единственным выражением особенностей этой задачи. Нигде до этого момента мы не встречались с ситуацией, когда в одношаговой части рекуррентного соотношения появляется зависимость от оптимальной для $(k - 1)$ -шагового процесса функции. То, что это не приводит к каким-либо дополнительным трудностям, может быть легко обосновано читателем при осуществлении вычислительного алгоритма, столь часто используемого в этой книге. Численные результаты, полученные таким путем, приведены в работах, указанных в конце главы.

23. ЗАДАЧИ БОЛЕЕ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Как мог заметить читатель, все иллюстративные задачи, собранные в этой главе, являются задачами с малой размерностью, поскольку они связаны с динамическим программированием. Задача о наборе высоты самолетом за минимальное

время, рассмотренная в § 4, привела к быстрому и легко программируемому способу грубой аппроксимации оптимальной траектории. Хотя это и является желаемым результатом, хотелось бы также иметь возможность вычислять решения для задач, включающих значительно большее число реальных факторов, подобных тем, которые были включены в формулировку, приведенную в § 9.

Для осуществления этой программы необходимы большие и более быстродействующие вычислительные машины, дополнительное время и усилия. Сходное положение имеет место и для задач о ракетах и межпланетных космических полетах. Некоторые способы понижения размерности, например введение множителей Лагранжа, уже были изложены. В то же время для «усмирения» неподатливых траекторных задач необходимы и другие аналитические построения. Некоторые методы — «кандидаты в укротители проблемы» будут рассмотрены в параграфах главы XII, посвященных численному анализу. Задачи могут быть обобщены не только посредством увеличения размерности. Так, в математическую модель могут, и часто должны быть, введены элементы случайности. Наконец, должны быть рассмотрены модели приспособления адаптации, где система обучается в окружающей ее среде и оптимально приспособляется к ней. Мы будем обсуждать эти вопросы в главе об управлении с обратной связью (глава IX).

24. ЗАДАЧА О ПУТЕШЕСТВИЯХ

В качестве дальнейшего примера приложения этих идей рассмотрим следующую задачу о путешествиях, которая возникает в самых разнообразных прикладных вопросах.

Предположим, что имеются N городов, занумерованных индексом $i = 1, 2, \dots, N$ в некотором порядке, и задан ряд чисел t_{ij} , где

$$\begin{aligned} t_{ij} & \text{— время, потребное на путешествие} \\ & \text{из } i\text{-го города в } j\text{-й.} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Начав с первого города, мы хотим провести путь в N -й, который потребует минимального времени. Мы можем идти прямо или заходить по пути в любой другой город.

В тех случаях, когда между некоторыми городами не имеется никакой связи, мы будем считать соответствующее t_{ij}

бесконечным или, при использовании цифровых вычислительных машин, очень большим положительным числом. Если N велико, то любое решение путем простого перебора невозможно. Попытаемся решить задачу с помощью метода функциональных уравнений. Рассмотрим общую задачу об определении минимального времени, потребного для перехода из i -го города в N -й. Пусть

f_i — время, потребное для путешествия из i -го в N -й город при использовании оптимальной политики.

Тогда те же самые доводы, которые мы использовали при рассмотрении предшествующей траекторной задачи, приведут к соотношению

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \min_{j \neq i} [t_{ij} + f_j], \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ f_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Легко можно показать, что эта система уравнений имеет единственное решение, а следовательно, что решение этого ряда задач эквивалентно решению исходной задачи.

25. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Уравнение (6.32) обладает особенностью, которая ранее не встречалась; именно здесь неизвестная функция появляется и в левой и в правой частях уравнения. Следовательно, мы не имеем готовой итерационной схемы для его решения.

Необходимо использовать какой-либо метод последовательных приближений. Мы могли бы, например, положить

$$\left. \begin{aligned} f_i^{(0)} &= \min_{j \neq i} t_{ij}; \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad f_N^{(0)} = 0, \\ f_i^{(k)} &= \min_{j \neq i} [t_{ij} + f_j^{(k-1)}]; \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad f_N^{(k)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Это приводит к монотонной сходимости снизу. С другой стороны, мы можем мыслить в терминах политик. Рассмотрим сначала те пути, которые ведут прямо из i в N , затем те, в которых делается одна остановка, и т. д. Это

приводит к следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} g_i^{(0)} &= t_{iN}; \quad (i=1, 2, \dots, N-1); \quad g_N^{(0)} = 0, \\ g_i^{(k)} &= \min_{j \neq i} [t_{ij} + g_j^{(k-1)}]; \quad (i=1, 2, \dots, N-1); \quad g_N^{(k)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

при которой осуществляется монотонная сходимость сверху, причем за конечное число шагов.

Метод (6.33) оценивает наилучший путь длины k , начинающийся от города i . Однако уравнения имеют то свойство, что N является стоком, и если путь достигает N менее чем за k шагов, то там можно остановиться. Для любого другого города путь не может оборваться ранее k шагов.

Следовательно, когда k становится большим, все пути стремятся прийти в город N , а минимизация гарантирует, что они сделают это наилучшим образом.

В методе (6.34) считается, что каждый город достижим на каждой итерации, но потребное время не обязательно является оптимальным. Последовательные приближения сходятся к наилучшему пути.

Этот пример иллюстрирует различие между итерациями в пространстве функций и в пространстве политик (поведений), рассмотренное в § 44 главы II. Метод (6.33) дает при каждой итерации оптимальное решение задачи, отличающейся от исходной. Метод (6.34), прежде чем осуществится сходимость, дает неоптимальное решение исходной задачи. Оба метода пригодны для ручного или машинного счета при умеренных значениях N , т.е. $N \leq 100$, и для машинного счета для N порядка нескольких тысяч.

26. n-й ПО КРАТКОСТИ ПУТЬ

Иногда бывает интересно определить не только кратчайший путь, но и второй по краткости, третий по краткости и т.п. Тем самым мы сможем оценить, насколько важно использовать наикратчайший путь по сравнению, скажем, с десятым по краткости. Для того чтобы проиллюстрировать метод, введем последовательность величин

$$v_i, \text{ равных времени, необходимому на переход от } i \text{ к } N, \quad (6.35)$$

при использовании второго по краткости пути,
 $i = 1, 2, \dots, N-1,$

Для получения соотношений для v_i заметим, что если первая остановка на пути из i в N делается в j , то продолжение движения из j в N должно происходить либо по пути, который минимизирует время путешествия от j к N , либо по пути, который является вторым по краткости для перехода из j в N .

Пусть

$$\min_1 v_i \text{ есть абсолютный минимум } v_i \ (i = 1, 2, \dots, N), \quad (6.36)$$

$$\min_2 v_i \text{ есть вторая по малости величина } v_i.$$

Тогда мы имеем уравнение

$$v_i = \min \left\{ \min_{j \neq i} (t_{ij} + v_j); \min_{j \neq i} (t_{ij} + f_j) \right\}; \quad (i = 1, 2, \dots, N-1);$$

$$v_N = 0, \quad (6.37)$$

а f_j определены в § 24.

Аналогичные, но несколько более громоздкие уравнения можно вывести для n -го по краткости пути.

27. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью этой главы было продемонстрировать читателю, что большое число классов задач об оптимальных траекториях может быть быстро и точно решено численно с помощью метода динамического программирования.

Преимущество подхода с помощью динамического программирования заключается в том, что реалистические уравнения движения и реалистические ограничения легко учесть при решении функциональных уравнений.

Основной трудностью, которую мы должны преодолеть, является *размерность*. К проблеме о том, как обращаться с функциями нескольких переменных, мы еще будем возвращаться.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Применению вариационного исчисления к траекторным задачам были посвящены разносторонние исследования. Рассмотрение некоторых результатов, а также ссылки на многие другие статьи см. в работах:

J. V. Breakwell, The optimization of trajectories, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 7, 1959.

H. J. Kelley, Gradient theory of optimal flight paths, Amer. Rocket Soc. J., vol. 30, 1960.

§§ 2 — 8. Представленные здесь результаты первоначально изложены в работе:

S. Cartaino and S. Dreyfus, Application of dynamic programming to the airplane minimum time-to-climb problem, Aero. Eng. Rev., 1957.

§ 10. Задача была рассмотрена в работе:

Д. Е. Охочимский, Т. М. Энеев, Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, УФН, т. LXIII, вып. 1, 1957, с использованием вариационных методов и в работе

R. Bellman, Dreyfus, An application of dynamic programming to the determination of optimal satellite trajectories, J. British Interplanetary Soc., vol. 17, 1959—1960, pp. 78—83, с использованием динамического программирования.

См. также

F. T. Smith, The Optimization of Multistage Orbit Transfer Processes by Dynamic Programming, The RAND Corporation, Paper P-2177, 1961.

P. L. Welding and J. Stringer, A problem in vehicle fuel consumption, Oper. Res. Q., vol. 11, 1960, pp. 197—204.

R. Bellman, S. Dreyfus and R. Kalaba, Application of Dynamic Programming to Space Guidance, Satellites and Trajectories, The RAND Corporation, Paper P-1923, 1960.

J. N. Franklin, The range of a fleet of aircraft, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 8, 1960, pp. 541—548.

S. E. Dreyfus, The analysis and solution of optimum trajectory problems, Symposium on Mathematical Optimization Techniques; Santa Monica, California, 1960.

Другой подход изложен в

A. E. Bryson, W. F. Denham, F. J. Carroll and K. Mikami, Determination of the Lift or Drag Program that Minimizes Reentry Heating with Acceleration or Range Constraints Using a Steepest Descent Computation Procedure (готовится к печати).

По поводу использования леммы Неймана — Пирсона и распространения ее для решения вариационных задач с ограничениями см.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, Some Aspects of the Mathematical Theory of Control Processes, The RAND Corporation, Report R-313, 1958 [русский перевод: Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории управления, ИЛ, 1961].

G. Goertzel, Minimum critical mass and flat flux, J. Nuclear Energy, vol. 2, 1956, pp. 193—201.

§§ 20—22. Эти результаты получены Тен-Дайком. См.

R. P. Ten-Dyke, Computation of rocket step weights to minimize initial gross weights, *Jet Propulsion*, vol. 28, 1958, pp. 338—340.

§ 24. Изложение основывается на работе:

R. Bellman, A routing problem, *Q. Appl. Math.*, vol. 16, 1958, pp. 87—90.

См. также

R. E. Greenwood, Linear graphs and matrices, *Texas J. Science*, vol. 12, 1960, pp. 105—108.

Возможны и многие другие подходы к решению этой фундаментальной проблемы. Дальнейшие ссылки и обобщения, а также иные методы даны в

R. Kalaba, On some communication network problems, combinatorial analysis, *Proc. Symposium in Applied Mathematics*, American Math. Soc., vol. 10, 1960.

M. Pollack, The maximum capacity route through a network, *Operations Research*, vol. 8, 1960, pp. 733—736.

M. Pollack and N. Wiebenson, Solutions of the shortest route problems — a review, *Operations Research*, vol. 8, 1960, pp. 224—230.

Рассмотрение близких задач с помощью линейного программирования см. в

L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, Maximal flow through a network, *Canadian J. Math.*, vol. 8, 1956, pp. 399—404.

§ 26. Более детальное рассмотрение можно найти в работе:

R. Bellman and R. Kalaba, On k -th best policies, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 8, 1960, pp. 582—588,

и в работе Р. Калаба, указанной в ссылке к § 24.

Некоторые совершенно иные идеи развиваются в

J. Beardwood, J. H. Halton and J. M. Hammersley, The shortest path through many points, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 55, 1959, pp. 299—327.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Проблеме построения оптимальных траекторий посвящена огромная литература. Одна из первых важных работ в этом направлении отражена в статье:

Д. Е. Охотимский, К теории движения ракет, *Прикладная математика и механика*, т. X, в. 2, 1946, 251—272.

Ряд задач рассмотрен в книге:

Л. С. Пон т р я г и н, В. Г. Бол т я н с к и й, Р. В. Г а м к р е л и д з е, Е. Ф. Ми щ е н к о, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

Можно также указать несколько работ последнего времени, где можно найти и дальнейшие ссылки:

В. К. И с а е в, Принцип максимума Л. С. Пон т р я г и н а и оптимальное управление тяги ракет, Автоматика и телемеханика, № 8, 1961.

Г. Л е й т м а н н, О максимальной длине полета ракеты в горизонтальной плоскости, Прикладная математика и механика, в. 3, 1963.

G. L e i t m a n n, On a class of variational Problems in Rocket Flight, Journ. of Aero-space sci., № 9, 1959.

A. M i e l e, General Variational Theory of the Flight Path of Rocket Powered Aircraft, Missiles and Satellite Carriers, Aeronaut. Acta, № 4, 1958.

ГЛАВА VII

МНОГОШАГОВЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПРОМЫШЛЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективное использование комплекса взаимозависимых отраслей представляет собой исключительно важную задачу в области экономики и промышленности. Очевидно, что при любом реалистическом ее рассмотрении мы столкнемся с трудно преодолимыми препятствиями. Прежде чем думать об оптимизации, нам придется столкнуться с точным количественным описанием возникающих процессов, с определением критериев, с необходимостью учета стохастических явлений и приспособления и с нахождением допустимых, а не оптимальных политик.

Здесь мы ставим весьма скромную задачу — изучить упрощенные модели многошаговых производственных процессов. Цель наша состоит в том, чтобы показать, как методика функциональных уравнений позволяет получить вычислительную основу для решения ряда задач, которые сохраняют некоторые особенности реальных экономических проблем.

Наша, по видимости специализированная, математическая модель достойна внимания, так как тождественные аналитические вопросы возникают во многих областях, например в лесоводстве, при исследовании производства и хранения марганца, на многих стадиях химической технологии. В качестве примеров последней группы рассмотрим

задачи разделения изотопов, замены катализатора, а также другие задачи химического производства.

Мы очень кратко укажем некоторые связи между представленными здесь результатами и макроэкономической теорией фон Неймана, примыкающей к теории игр и линейному программированию. Дальнейшие результаты можно найти в работах, ссылки на которые даны в конце главы.

Часто процессы рассматриваемого здесь типа носят название задач на узкие места, так как свойства всего процесса определяются ресурсами или производственными мощностями, имеющимися в наименьшем количестве.

2. ДВУХОТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

Допустим, что мы исследуем работу двухотраслевого комплекса, состоящего из автомобильной и сталелитейной промышленности. Хотя эти названия не должны приниматься всерьез, но, используя привычные понятия и опираясь на определенные интуитивные представления, мы можем надеяться получить ключ к численному и аналитическому решению.

С другой стороны, получаемые нами решения можно использовать для обеспечения некоторой интуитивной основы при решении еще более сложных моделей. Одной из причин того, что стоит тратить время на рассмотрение этих сверхупрощенных моделей в некоторых подробностях, является надежда на известное прояснение структуры решения более общих задач этой природы.

Мы будем предполагать, используя идею сосредоточенных параметров, которая играет такую существенную роль в математической физике, что состояние каждой отрасли в любой отдельный момент времени может быть определено двумя величинами:

- | | |
|--|----------|
| (а) запасы сырья, необходимого для производства, | } (7. 1) |
| (б) производственная мощность отрасли по изготовлению своего продукта. | |

Чтобы упростить формулировку и вычисления в этом частном случае, мы будем предполагать, что мощности автомобильной промышленности неограниченно велики. Короче, производство автомобилей будет зависеть только от количества отведенной на это стали.

В любой отдельный момент времени сталь из общих запасов стали может быть использована с любой из трех целей:

- | | |
|--|---------|
| (a) произвести дополнительную сталь, используя существующую мощность сталелитейной промышленности, | } (7.2) |
| (b) увеличить существующую мощность сталелитейной промышленности, | |
| (c) произвести автомобили, используя существующую мощность автомобильной промышленности. | |

Мы хотим определить политику распределения ресурсов, которая максимизирует общее количество автомобилей, произведенных за данный период времени.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В данной задаче процесс будет предполагаться дискретным; распределение ресурсов производится только в моменты времени $t=0, 1, \dots, T-1$. В любой отдельный момент времени $t=n$ состояние системы определяется величинами:

- | | |
|--|---------|
| (a) $x_s(n)$ — количество стали на складах, | } (7.3) |
| (b) $x_m(n)$ — мощность сталелитейных заводов. | |

При определении распределения стали, имеющейся в распоряжении на шаге n , мы вводим величины:

- | | |
|---|---------|
| (a) $z_s(n)$ — количество стали, используемой для производства дополнительной стали, | } (7.4) |
| (b) $z_m(n)$ — количество стали, используемой для увеличения мощности сталелитейной промышленности, | |
| (c) $z_a(n)$ — количество стали, используемой для производства автомобилей. | |

Мы имеем соотношение

$$x_s(n) = z_s(n) + z_m(n) + z_a(n). \quad (7.5)$$

Чтобы отразить некоторые черты реальных процессов, мы налагаем два ограничения на величины z :

- | | |
|--|---------|
| (a) $z_a(n) \leq a_1 x_s(n), \quad 0 < a_1 < 1,$ | } (7.6) |
| (b) $z_s(n) \leq x_m(n).$ | |

Первое ограничение утверждает, что для производства автомобилей можно использовать не более определенного количества процентов имеющейся в распоряжении стали на любом шаге от n до $n+1$, в то время как второе утверждает, что нельзя разместить на сталелитейных заводах больше стали, чем максимальная мощность заводов.

Мы выберем единицы измерения так, чтобы количество автомобилей, произведенных на шаге $(n, n+1)$, было равно $z_a(n)$. Далее, количество стали, произведенной на шаге $(n, n+1)$, пропорционально $z_s(n)$, и рост мощности сталелитейной промышленности пропорционален $z_m(n)$. Пусть соответствующие коэффициенты пропорциональности равны a_2 и a_3 .

Таким образом, мы предполагаем, что имеем линейную модель производства.

Аналитически это выражается в виде

$$\left. \begin{aligned} x_s(n+1) &= a_2 z_s(n), \quad a_2 > 1, \quad x_s(0) = c_1, \\ x_m(n+1) &= x_m(n) + a_3 z_m(n), \quad a_3 > 0, \quad x_m(0) = c_2. \end{aligned} \right\} (7.7)$$

Требуется выбрать величины $z_s(n)$, $z_a(n)$ и $z_m(n)$, $n = 0, 1, \dots, T-1$, так, чтобы максимизировать общее количество автомобилей, произведенных за время T -шагового процесса.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Аналитическое решение подобных задач усложняется двумя факторами: линейностью и наличием ограничений. Тем не менее обширное множество вариационных задач может быть решено в явном виде.

Непрерывный вариант этой вариационной задачи состоит в нахождении вектора u , максимизирующего скалярное произведение $(x(T), a)$, причем x и u связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(0) = C \quad (7.8)$$

и ограничением вида

$$Cu \leq Dx. \quad (7.9)$$

Эти задачи не могут решаться классическими методами вариационного исчисления. Работы, содержащие аналитическое

решение большого числа задач этого типа, перечислены в конце этой главы.

Переходя к получению численного решения, мы ясно видим, что дискретная задача может быть сформулирована как задача линейного программирования.

Мы должны максимизировать линейную форму

$$L(z) = \sum_{n=0}^{T-1} z_A(n) \quad (7.10)$$

при ограничениях (7.5), (7.6) и (7.7).

Чтобы исследовать выполнимость решения в этом направлении, подсчитаем переменные, предполагая, что нас интересует 30-шаговый процесс. С тремя дополнительными неизвестными, вводимыми на каждом шаге, мы получаем задачу, включающую 90 переменных, связанных 120 соотношениями. Эта задача хоть и не огромного, но тем не менее порядочного размера. Если же мы хотим определить зависимость решения от c_1 и c_2 (первоначальных запасов стали и первоначальной мощности заводов), то прямой метод этого типа может потребовать совершенно немыслимого времени.

Мы хотим вместо этого представить численный метод, который автоматически дает зависимость решения от c_1 и c_2 .

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Определим для $N=1, 2, \dots$; $c_1 \geq 0$; $c_2 \geq 0$ функцию $f_N(c_1, c_2)$, равную суммарному выпуску автомобилей за N этапов, причем первоначальный запас стали равен c_1 , первоначальная заводская мощность равна c_2 и используется оптимальная политика. (7.11)

Мы имеем:

$$f_1(c_1, c_2) = a_1 c_1, \quad (7.12)$$

и вообще

$$f_N(c_1, c_2) = \max_z [z_a + f_{N-1}(a_2 z_s, c_2 + a_2 z_m)] \quad (7.13)$$

для $N=2, 3, \dots$, где максимизация происходит по области в z -пространстве, определенной неравенствами

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & z_a, z_s, z_m \geq 0, \\ (b) \quad & z_a + z_s + z_m = c_1, \\ (c) \quad & z_a \leq a_1 c_1, \\ (d) \quad & z_s \leq c_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

В следующем разделе мы рассмотрим численное определение последовательности $\{f_N(c_1, c_2)\}$.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРШИН

Область в пространстве переменных (z_a, z_s, z_m) , определенная неравенствами (7.14), имеет форму, показанную на рис. 75.

Вершины, перенумерованные на рис. 75, имеют следующее значение в рамках нашего процесса:

1. В случае, если заводская мощность не вносит ограничений, вся имеющаяся в распоряжении сталь направляется на производство новой стали.

2. Направить максимально возможное количество стали на производство стали; сталь, оставшуюся после удовлетворения заводских мощностей, направить на расширение этих мощностей.

3. Допустимая часть запасов стали предназначена на производство автомобилей, остаток — на производство стали.

4. Случай, когда заводские мощности недостаточны для обработки всей имеющейся в распоряжении стали. Эта вершина изображает распределение стали для сталелитейного производства до предела заводских мощностей, распределение ее в автомобильном производстве вплоть до допустимой доли и назначение оставшейся стали на расширение заводских мощностей.

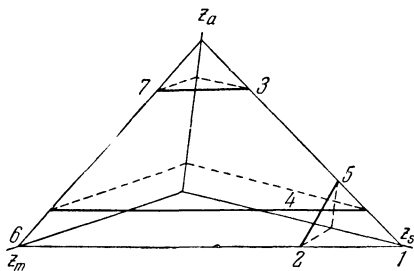


Рис. 75. Область изменения величин z_a, z_s, z_m .

5. Направить максимально возможное количество стали на производство стали, а остаток — на производство автомобилей.

6. Направить все текущие запасы стали на расширение заводских мощностей.

7. Производить максимально возможное количество автомобилей, а с оставшейся сталью расширять заводские мощности.

Очевидно, что все эти условия не встречаются сразу, а зависят от производственных мощностей и запасов стали, которые изменяются в течение процесса.

Из этой семерки только первые пять случаев представляют реальную возможность, так как вершины 6 и 7 заканчивают процесс — новая сталь не производится.

Можно показать, что максимизация по вершинам области дает либо оптимум, либо очень хорошее приближение по мере произвольного возрастания числа шагов. Здесь, так как нас прежде всего интересует указание общего подхода к задачам такого типа, мы будем считать максимизацию по вершинам точной. Во всяком случае вычисление этого типа дает полезное приближение в пространстве политик.

Если бы мы хотели идти *с самого начала*, не имея никаких предвзятых суждений о положении максимума, мы должны были бы делать следующее. Соотношение (7.13) может быть записано в виде

$$f_N(c_1, c_2) = \max_{\{z\}} [\min(a_1 c_1, c_1 - z_s - z_m) + \\ + f_{N-1}(a_2 z_s, c_2 + a_2 z_m)], \quad (7.15)$$

где максимизация теперь происходит по области

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad z_s, z_m \geq 0, \\ (b) \quad z_s + z_m \leq c_1, \\ (c) \quad z_s \leq c_2. \end{array} \right\} \quad (7.16)$$

7. УМЕНЬШЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ И ДИАПАЗОНА ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН

Покажем теперь, что мы можем свести задачу к последовательности одномерных задач и одновременно ввести «стягивающее» преобразование. Этим мы хотим сказать, что

мы можем гарантировать, что число возможных состояний системы не возрастает на протяжении времени.

Прежде всего из линейности всех ограничений и функций производства ясно, что $f_N(c_1, c_2)$ является однородной функцией первой степени c_1 и c_2 . Следовательно, для $c_1, c_2 > 0$ мы имеем:

$$f_N(c_1, c_2) = c_1 f_N\left(1, \frac{c_2}{c_1}\right) = c_2 f_N\left(\frac{c_1}{c_2}, 1\right). \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что нам надо вычислять только $f_N(1, x)$ или $f_N(x, 1)$. Возвращаясь к (7.13), мы имеем:

$$\begin{aligned} f_N(1, c_2) &= \max_{\{z\}} [z_a + f_{N-1}(a_2 z_s, c_2 + a_3 z_m)] = \\ &= \max_{\{z\}} \left[z_a + a_2 z_s f_{N-1}\left(1, \frac{c_2 + a_3 z_m}{a_2 z_s}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Теперь мы видим, что вычисление $f_N(1, c_2)$ для $c_2 \geq 0$ зависит только от знания $f_{N-1}(1, c_2)$ для $c_2 \geq 0$. Это и есть требуемое уменьшение размерности. Однако перед нами еще трудность расширяющегося диапазона для c_2 , так как отношение $\frac{c_2 + a_3 z_m}{a_2 z_s}$ может быть много больше, чем c_2/c_1 .

Чтобы избежать этой трудности, покажем, что мы можем вычислить $f_N(1, x)$ и $f_N(x, 1)$ для $0 \leq x \leq 1$, зная $f_{N-1}(1, x)$ и $f_{N-1}(x, 1)$ для $0 \leq x \leq 1$. Целесообразно ввести две функции вместо одной, чтобы сохранить фиксированным интересующий нас интервал.

Возвращаясь к (7.18), имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_N(1, c_2) &= \max_{\{z\}} \left[z_a + a_2 z_s f_{N-1}\left(1, \frac{c_2 + a_3 z_m}{a_2 z_s}\right) \right] \\ &\quad \text{(для } a_2 z_s \geq c_2 + a_3 z_m) \\ &= \max_{\{z\}} \left[z_a + (c_2 + a_3 z_m) f_{N-1}\left(\frac{a_2 z_s}{c_2 + a_3 z_m}, 1\right) \right] \\ &\quad \text{(для } a_2 z_s \leq c_2 + a_3 z_m). \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Используя это уравнение и учитывая замечания о максимизации по вершинам, мы получим очень простую вычислительную схему.

8. ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Упрощения, введенные с помощью преобразований § 7, являются самыми значительными в этом частном исследовании. Что касается программирования, то тем самым получаются следующие результаты: (а) сокращение времени и объема памяти с T^2 до $2T^*$) и (б) дальнейшее значительное сокращение, вызываемое устранением расширяющейся сетки.

Разовьем подробно эти два пункта. Обычно, чтобы выразить все возможные состояния системы, определенной двумя независимыми параметрами (здесь c_1 — запасы стали и c_2 — заводская мощность), необходимо построить сетку значений $f_N(c_1, c_2)$ в пространстве (c_1, c_2) , а затем интерполировать по этой двумерной области, чтобы определить $f_N(c'_1, c'_2)$, т. е. количество стали, предназначенной для производства автомобилей в течение процесса, состоящего из N шагов, в котором первоначальные значения равны c'_1 и c'_2 , где c'_1, c'_2 не являются точкой сетки. Эта функция необходима для последующего вычисления функций $f_{N+1}(c_1, c_2)$. Если интервалы $[0, c_1]$ и $[0, c_2]$ разделены на n частей этой сеткой, мы должны вычислить и запомнить для дальнейшего использования n^2 значений $f_N(c_1, c_2)$. Потребность во времени становится даже более серьезной из-за дополнительных логических операций, необходимых при рассмотрении двумерной системы. Вот чем объясняется экономия, проистекающая из сведения к одномерной форме.

Возможность расширения сетки является серьезным препятствием в некоторых процессах динамического программирования. Говоря неформально, ситуация такова: чтобы рассчитать условия в момент времени t , мы должны знать заранее все возможные состояния, которые могли бы существовать в момент времени $t-1$. В нашем конкретном приложении, чтобы определить количество автомобилей, произведенных за N периодов, мы должны знать их количество за $N-1$ периодов для всех допустимых запасов стали и мощностей. Но после одного периода производства запасы или мощность (либо то и другое) могут возрасти. Поэтому для вычисления $f_N(c_1, c_2)$ необходима величина $f_{N-1}(c'_1, c'_2)$,

*) Речь идет о характере зависимости этих характеристик от числа шагов. (Прим. ред.)

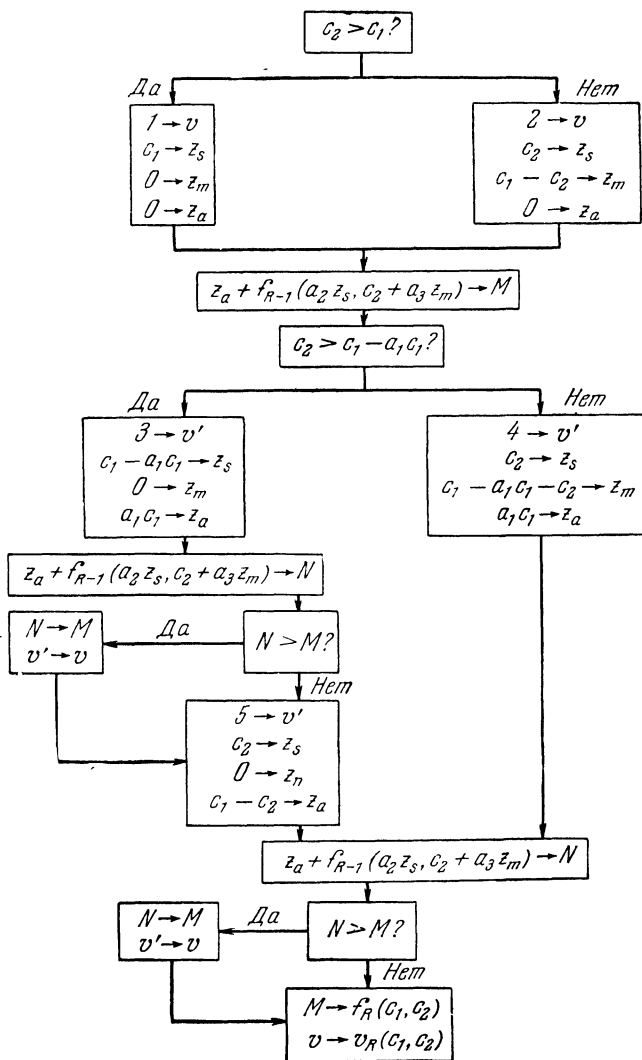


Рис. 76.

где c'_1 может быть больше c_1 и аналогично c'_2 больше c_2 . Следовательно, область, по которой может быть вычислена $f_N(c_1, c_2)$, меньше, чем область, в которой известна $f_{N-1}(c_1, c_2)$. Поэтому надо начинать расчеты N -го шага с рассмотрения большой области, чтобы завершить вычисления с умеренным диапазоном значений c_1 и c_2 . Методика § 7, обходящая это препятствие, является реальным и значительным прогрессом.

Заслуживает внимания одна новая черта этой задачи — оптимизация по трехмерной области. Методы решения общих многомерных задач такого типа мало исследованы. Здесь, конечно, не спасают природа функций и наши требования о том, что должны быть рассмотрены только вершины области. Программа для определения и оценки подходящих вершин изображена схематически на рис. 76.

Таблица 7.1

Анализ типичной ситуации на узкие места.
Пятнадцатishаговый процесс с параметрами $a_1 = 0,2$;
 $a_2 = 2$; $a_3 = 0,4$ и исходными данными $c_1 = 1$, $c_2 = 1$

Информация, получаемая непосредственно при вычислениях			Фактические условия при использовании оптимальной политики	
этап	нормированное условие (c_1, c_2) в начале этапа	вершина	фактическое условие в начале этапа	сталь, распределенная в автопромышленности
1	(1; 1)	1	(1; 1)	0
2	(1; 0,5)	2	(2; 1)	0
3	(1; 0,7)	2	(2; 1,4)	0
4	(1; 0,5857)	2	(2,8; 1,64)	0
5	(1; 0,642)	2	(3,28; 2,096)	0
6	(1; 0,611)	2	(4,192; 2,57)	0
7	(1; 0,626)	2	(5,14; 3,22)	0
8	(1; 0,620)	4	(6,44; 3,988)	1,288
9	(1; 0,588)	4	(7,976; 4,4536)	1,595
10	(1; 0,586)	4	(8,9072; 5,2196)	1,781
11	(1; 0,573)	4	(10,4392; 5,9817)	2,008
12	(1; 0,579)	4	(11,9634; 6,9268)	2,393
13	(1; 0,576)	4	(13,8536; 7,9797)	2,771
14	(1; 0,577)	4	(15,9594; 9,2086)	3,192
15	(1; 0,577)	4	(18,4172; 10,6226)	3,683
Суммарное распределение в автомобильной промышленности				18,853

Остальная часть программы касается вычисления таблицы значений $f_N(c_1, c_2)$, блока переноса этой таблицы и ее последующего использования при составлении таблицы $f_{N+1}(c_1, c_2)$.

Таблица 7.1 представляет собой результат анализа одной типичной ситуации. Вычисления позволяют выбирать оптимальным образом вершину на каждом шаге для любого начального условия, а также составлять список выполненных расхождений стали в автомобильной промышленности. Чтобы оценить преимущества полученных результатов, был проведен ручной счет, использующий политику, диктуемую вычислительной машиной; это выявляет фактический рост системы во времени. Чувствительность процесса была продемонстрирована путем оценивания дохода при политике, неоптимальной только для первого решения. Первоначальный выбор вершины Z приводит к повсеместному уменьшению производительности на 8 процентов.

9. СТАЦИОНАРНЫЙ РОСТ

Возникает вопрос относительно того, укладывается ли комплекс описанного типа в обыкновенную модель роста, в которой запасы, а также мощность равномерно возрастают во времени. Если так, то мы могли бы ожидать экспоненциального роста.

Так, например, рассматривая дифференциальное уравнение в (7.8), мы подозреваем асимптотическое поведение вида

$$x \sim e^{\lambda t} w, \quad y \sim e^{\lambda t} z, \quad (7.20)$$

где w и z не зависят от времени. Мы приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \lambda w &= Aw + Bz, \\ Cz &\leq Dw \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

и к задаче определения наибольшего λ , для которого выполняются эти соотношения.

Вопросы такой природы являются частью теории линейных неравенств. Они играют важную роль в теории игр и линейном программировании, исследовании вычислительных аспектов линейных неравенств. Задача, поставленная выше, впервые была рассмотрена фон Нейманом в связи с его

исследованием возможности экспоненциально расширяющейся экономики.

Каким бы важным ни был вопрос об оптимальном стационарном режиме, проблема подхода к стационарному режиму важнее, так как большинство приложений имеет дело с процессами конечной длительности.

В нашем рассмотрении марковских процессов принятия решений мы опять столкнемся с асимптотическим поведением и связью с линейным программированием. Там мы подробно изложим некоторые результаты.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Читатель, интересующийся дальнейшим рассмотрением задач на узкие места, может обратиться к главам 6 и 7 книги «Динамическое программирование», где представлены более сложные модели и несколько аналитических решений.

По приложениям к лесоводству и дальнейшие численные результаты см.

T. Arimizu, Working group matrix in dynamic model of forest management, J. Japanese Forestry Soc., vol. 40, 1958, pp. 185—190.

По приложениям к химической технологии см.

S. M. Roberts, Dynamic Programming Formulation of the Catalyst Replacement Problem (to appear).

R. Aris, R. Bellman and R. Kalaba, Some optimization problems in chemical engineering, Chem. Engr. Progress Symp. Series, vol. 56, 1960, pp. 95—102.

R. Aris, The Optimal Design of Chemical Reactors, Academic Press, Inc., New York, 1961.

§ 4. Непрерывный вариант симплекс-метода линейного программирования, предназначенный для получения решений непрерывных вариационных задач, описанных в этом параграфе, разработан Леманом. См.

S. Lehman, On the Continuous Simplex Technique. The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1386, 1954.

§ 5. Эти результаты были даны в работах:

R. Bellman, On bottleneck problems and dynamic programming, Proc Nat. Acad. Sci USA, vol. 39, 1953, pp. 947—951.

R. Bellman, Bottleneck problems. functional equations, and dynamic programming, Econometrica, vol. 22, No. 4, 1954.

§ 9. Первоначальная работа фон Неймана:

J. von Neumann, A model of general economic equilibrium, Review of Economic Studies, vol. 13, 1945—1946, pp. 1—9.

Дальнейшие результаты могут быть найдены в
M. Morishima, Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models, Econometrica, vol. 28, 1960, pp. 352—363.

J. G. Kemeny, O. Morgenstern, G. L. Thompson, A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, Econometrica, vol. 24, 1956, pp. 115—135.

K. Marx, Capital, C. Kerr and Co., Chicago, Illinois, 1933, vol. II, Chapters 20 and 21.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Исходные положения о построении моделей расширенного воспроизводства даны К. Марксом и В. И. Лениным.

К. Маркс, Капитал, т. II, Госполитиздат, 1957, стр. 511 и далее.

В. И. Ленин, По поводу так называемого вопроса о рынках, Соч., т. I, изд. 5, стр. 67—122.

Дальнейшие результаты можно найти в работах:

В. С. Немчинов, Экономико-математические методы и модели, Соцэкгиз, 1962.

Л. В. Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, Изд-во АН СССР, 1959.

Математический анализ расширенного воспроизводства (Труды научного совещания о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании, т. II), Изд-во АН СССР, 1962.

Д. Гейл, Линейные экономические модели, ИЛ, 1963.

Р. Аллен, Математическая экономия, ИЛ, 1963.

С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., Изд-во «Мир», 1964.

ГЛАВА VIII

ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой и следующих главах мы хотим рассмотреть некоторые приложения динамического программирования к процессам регулирования с обратной связью и к процессам, которые могут быть сведены к таковым. Так же как в главах, где рассматривались траекторные задачи и вариационное исчисление, мы посвятим первую из глав ознакомлению и формулировке задач, а следующую — вычислительным аспектам. Как мы неоднократно подчеркивали, и то и другое составляет отдельные, но близко связанные части единой проблемы. Их полное разделение ставит любую попытку решения реальной физической проблемы на слишком невыгодные исходные позиции.

Мы начнем рассмотрение с классической задачи регулирования (управления). Содержание этой задачи совершенно отлично от того, что мы в обыденной жизни именуем словом «управление». Далее мы рассмотрим математическую формулировку типичной задачи о регулировании с обратной связью, встречающейся в электронике. Первоначально мы будем затрагивать детерминированные процессы с обычными реальными ограничениями, неаналитическими и неявными функционалами. Затем мы обратимся к более сложным стохастическим процессам регулирования и процессам с приспособлением (адаптивным), где будут приведены вычислительные результаты, полученные Аоки.

Из последующего будет ясно, что аналитические и вычислительные исследования в этой обширной области, полной

заманчивых и значительных проблем, только начались. Поэтому очень мало было сделано в направлении строгой формулировки процессов; много еще остается сделать для обоснования используемых методов. Как обычно, мы сможем обойти ряд вопросов обоснования, рассматривая только дискретные варианты задач автоматического управления. Попутно мы хотим указать на то, что в этой общей области существует много интересных аналитических проблем.

В дополнение к вопросам, касающимся задач об управлении с обратной связью, мы рассмотрим задачу о максимальных отклонениях, возникающую при эксплуатации ядерных реакторов, неявную вариационную задачу детерминированного типа, задачу о релейном управлении и неявные вариационные задачи стохастического типа, которые будут встречаться при решении проблемы «мягкой посадки» на Луну или другие планеты, некоторые задачи о максимальной высоте и максимальной дальности, интересные для баллистики, и, наконец, некоторые процессы передачи сообщений, связанные с теорией информации. В конце главы приведено большое число ссылок на работы, посвященные другим приложениям.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Идея регулирования с обратной связью наиболее часто связывается с регулятором, использованным Уаттом для паровой машины. В действительности она еще старше, так как регулятор, изображенный Гюйгенсом для регулирования часов, был применен для ветряных мельниц и водяных колес до появления паровой машины. Более того, по-видимому, в Китае за несколько тысяч лет до промышленной революции уже использовались методы обратной связи. Тем не менее вплоть до самого последнего времени математические исследования процессов регулирования концентрировались вокруг относительно узкого понятия устойчивости. Рассмотрим систему, описываемую с помощью линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_n u = 0. \quad (8.1)$$

Это уравнение может возникнуть как уравнение в вариациях для более сложного нелинейного уравнения в ходе исследования устойчивости положения равновесия.

Система будет считаться *устойчивой*, если все решения уравнения (8.1) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Как хорошо известно, это эквивалентно требованию того, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (8.2)$$

имели отрицательные вещественные части. Необходимые и достаточные условия для этого были получены Раусом и Гурвицем; с тех пор было сделано еще многое в этой области.

Проблема регулирования была, таким образом, приведена к проблеме расчета. Она свелась к необходимости построения физической системы так, чтобы обеспечить выполнение условий устойчивости.

Этот способ исследования является слабым по ряду существенных соображений. В первую очередь утверждается линейность основных уравнений или, что эквивалентно, предполагается малость отклонений от положения равновесия*). Во-вторых, не охватывается рассмотрение стохастических (случайных) процессов и, в частности, процессов с адаптацией. Поэтому мы в дальнейшем не будем уделять внимание проблемам устойчивости. Читатель, интересующийся их изучением, найдет ряд ссылок в конце главы.

3. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Наша математическая модель будет построена по следующей схеме.

Рассмотрим диаграмму на рис. 77. Эту диаграмму надлежит интерпретировать следующим образом. В момент времени t на выходе системы S имеется сигнал $x(t)$. Этот сигнал сравнивается с желаемым выходным сигналом $w(t)$. Если имеется какое-либо отклонение, то к системе S прила-

*) Проблема устойчивости регулируемых систем отнюдь не связана с рассмотрением только линейных уравнений. (Прим. ред.)

гается корректирующий сигнал $y = y(x, w, t)$, стремящийся изменить $x(t)$, чтобы он оказался более близким к $w(t)$. Аналитическое описание простой системы регулирования

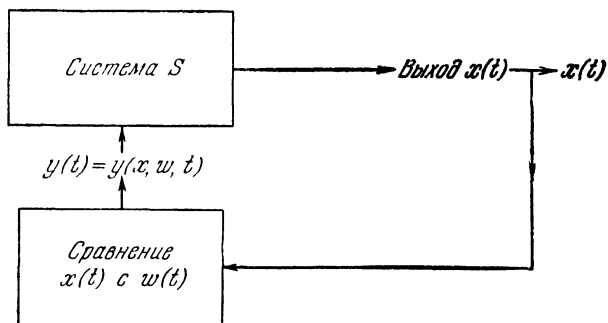


Рис. 77.

с обратной связью этого типа таково. Вместо исходного уравнения, описывающего систему

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t), \quad x(0) = c, \quad (8.3)$$

мы имеем новое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = h(x, t, y), \quad x(0) = c, \quad (8.4)$$

где y должно быть выбрано (при наличии определенных ограничений) так, чтобы минимизировать некоторую функцию, которая оценивает как затраты из-за отклонений $x(t)$ от вектора желаемого состояния $w(t)$, так и затраты на приложение вектора управлений $y(t)$.

Следуя нашему обычному подходу к вариационным проблемам, мы будем рассматривать эти задачи (которые могут быть сформулированы как задачи, входящие в сферу применения вариационного исчисления) как многошаговые процессы решения непрерывного типа. Однако, как указывалось выше, для вычислительных целей и для обхода трудностей, связанных со строгим обоснованием, мы будем рассматривать только дискретные варианты.

4. ВРЕМЕННÓЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ

Во многих случаях использование вспомогательного шага сравнения и факт приложения управляющих сил вводят в задачу временнóе запаздывание. Это означает, что $y(t)$ в действительности зависит не от $x(t)$ и $w(t)$, а скорее от $x(t - \Delta)$ и $w(t - \Delta)$, или чаще еще более сложным образом зависит от предыстории процесса. Это реалистичное соображение вносит некоторые очень интересные математические усложнения, которые, однако, мы не будем здесь рассматривать. Ссылки на многие статьи по этому вопросу могут быть найдены в конце главы.

5. ФОРМУЛИРОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Предположим, что $w(t)$ есть вектор желаемого состояния и что $k[x(t) - w(t)]\Delta + o(\Delta)$ есть мера отклонения x от w на интервале времени $[t, t + \Delta]$. Функционал

$$J(y) = \int_0^T k(x - w) dt \quad (8.5)$$

принимается тогда за полную меру отклонений. Как и в большинстве наших исследований, мы вводим аддитивную функцию полезности. Теперь имеется два способа учета реальных ограничений. Во-первых, мы можем предположить, что для управления имеется ограниченное количество ресурсов; это приводит к ограничению вида

$$\int_0^T q(x, y) dt \leq b_1. \quad (8.6)$$

Во-вторых, мы можем наложить ряд ограничений на уровень прилагаемых управлений

$$r_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (8.7)$$

Рассмотрим далее вариационную задачу минимизации функционала $J(y)$ при ограничении, задаваемом дифференциальным уравнением (8.4).

Задача сформулирована теперь в обычных терминах вариационного исчисления.

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Как было указано в главе V, задачи описанного выше типа весьма трудны. Тем не менее упорство, изобретательность и определенная доля удачи позволяют нам решить некоторые из них. К несчастью, огромное большинство вопросов, которые возникают даже при упрощенной постановке задач о регулировании с обратной связью, не совпадают с малым количеством доступных для решения задач.

После этих вступительных замечаний, мы впредь посвятим нашу энергию нахождению алгоритмов, которые приведут к численному решению. Как мы увидим, для достижения этой цели потребуются решить много аналитических вопросов.

7. ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ

Поскольку мы собираемся предложить общий метод, мы должны рассмотреть задачу в общем виде. Предположим, что нужно минимизировать функционал

$$J(y) = \int_0^T g(x, y) dt, \quad (8.8)$$

где x и y связаны уравнением

$$\frac{dx}{dt} = h(x, y), \quad x(0) = c, \quad (8.9)$$

и ограничениями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \int_0^T q_i(x, y) dt \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ (b) \quad & r_i(x, y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Вместо этой непрерывной вариационной задачи мы рассмотрим следующую дискретную задачу.

Минимизировать

$$J(y) = \sum_{k=0}^N g(x_k, y_k) \quad (8.11)$$

по всем y_k , удовлетворяющим соотношениям

$$x_{k+1} = x_k + h_k(x_k, y_k), \quad x_0 = c, \quad (8.12)$$

и ограничениям

$$\left. \begin{aligned} (a) \sum_{k=0}^N q_i(x_k, y_k) &\leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ (b) r_i(x_k, y_k) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad 0 \leq k \leq N. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Мы можем либо рассматривать вектор c и величины b_i как переменные, либо использовать множители Лагранжа и минимизировать

$$J_1(y) = \sum_{k=0}^N g(x_k, y_k) - \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{k=0}^N q_i(x_k, y_k) \quad (8.14)$$

или, как делалось ранее, рассматривать различные комбинации ситуаций. Все это представляет собой повторение того, что мы описали в главе V.

8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривая, например, задачу минимизации функционала (8.14), мы получим рекуррентное соотношение вида

$$f_N(c) = \min_{r_i(c, y) \leq 0} \left[g(c, y) - \sum_{i=1}^r \lambda_i q_i(c, y) + f_{N-1}(c + h(c, y)) \right]. \quad (8.15)$$

Как и ранее, вычислительная осуществимость решения на этом пути зависит от размерности c . В дальнейшем мы рассмотрим различные способы, в которых может быть использован метод последовательных приближений.

9. ЗАДАЧА О РЕЛЕЙНОМ УПРАВЛЕНИИ

Имеется следующая интересная задача с неявной функцией критерия. Мы хотим минимизировать время, требуемое для перевода системы из одного состояния в другое. Эта задача возникает во многих различных областях в разных внешних оформлениях.

Простой частный случай ее заключается в следующем. Задана линейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y, \quad x(0) = c, \quad (8.16)$$

где на компоненты y наложены ограничения

$$|y_i| \leq m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.17)$$

Мы хотим определить y так, чтобы минимизировать время, требующееся для перевода x из начального положения c в заданное, скажем в $x = 0$. Если предполагается*), что y_i могут принимать только значения $\pm m_i$, то эта задача именуется задачей о релейном управлении («bang-bang» control). Этой задаче посвящено большое число теоретических работ, использующих различные методы. Однако проблема получения простого вычислительного алгоритма еще не решена.

Если мы заменим (8.16) нелинейным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y), \quad x(0) = c, \quad (8.18)$$

то ситуация станет совсем другой. Обозначим через $f(c)$ минимальное время, требуемое для перехода от c в 0. Тогда имеем уравнение

$$f(c) = \min_y [\Delta + f(c + \Delta g(c, v))] + o(\Delta), \quad (8.19)$$

которое в пределе приводит к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\min_y (g(c, y), \text{grad } f) = -1, \quad (8.20)$$

где y подчиняется ограничениям (8.17), или условиям переключения ($y_i = \pm m_i$). Мы пользуемся некоторыми векторными обозначениями: $\text{grad } f$ есть вектор, i -я компонента которого равна $\frac{\partial f}{\partial c_i}$; $(x, y) = \sum_{i=1}^N x_i y_i$, где x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — соответственно компоненты x и y .

Из этого соотношения можно извлечь большую информацию, но его общее решение — дело довольно тонкое. Так как в обе части уравнения (8.19) входит одна и та же функция, то численное решение может быть проведено с помощью либо последовательных приближений, либо при-

*) Из принципа максимума Л. С. Понтрягина непосредственно следует, что при ограничениях типа (8.17) управления y_i могут в оптимальном решении принимать только значения $\pm m_i$. (Прим. ред.)

ближений в пространстве политик. Другой подход может быть осуществлен с помощью двойственной задачи. Вместо исходной задачи рассмотрим вопрос об определении управления u , которое минимизирует расстояние от начала координат в конце интервала времени T . Обозначая это минимальное расстояние через $f(c, T)$, мы получим функциональное уравнение

$$f(c, T) = \min_y [f(c + g(c, y) \Delta, T - \Delta)] + o(\Delta), \quad (8.21)$$

$$f(c, 0) = |c|,$$

где

$$|c| = \left(\sum_{i=1}^N c_i^2 \right)^{1/2}. \quad (8.22)$$

Первое значение T , для которого $f(c, T) = 0$, и есть введенная выше функция $f(c)$.

10. ВЫКЛЮЧЕНИЕ ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

Когда выключается тепловой ядерный реактор, присутствие продукта деления, йода, который, распадаясь, дает ксенон-135, может вызвать повышение концентрации ксенона в течение многих часов. Это крайне нежелательно, так как может отсрочить на несколько часов момент времени, в который реактор может быть вновь запущен, что в результате приводит к потере эффективности. Один из путей преодоления этого дефекта состоит в использовании количества ядерного горючего, во много раз большего, чем это требуется для создания критического соотношения. Другой путь заключается в тщательном регулировании процедуры включения с целью минимизации отравления реактора. Это и есть задача регулирования, которую мы хотим рассмотреть.

Используя упрощенную модель реального процесса, мы предположим, что состояние реактора в любой момент времени может быть задано с помощью

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{потока нейтронов, } \varphi, \\ \text{(b)} & \text{концентрации йода, } I, \\ \text{(c)} & \text{концентрации ксенона, } x. \end{array} \right\} \quad (8.23)$$

Предположим, что мы можем регулировать поток нейтронов φ . Уравнения, определяющие I и x , имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= a_{11}\varphi - a_{12}I, & I(0) &= c_1, \\ \frac{dx}{dt} &= a_{21}\varphi + a_{12}I - (a_3 + a_4\varphi)x, & x(0) &= c_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Требуется, чтобы поток нейтронов был сведен до нуля за время b , причем процесс начинается при $t=0$. В момент b состояние реактора задается условиями

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \varphi(b) = 0, \\ (b) \quad & I(b) = c_3, \\ (c) \quad & x(b) = c_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Величины c_3 и c_4 являются функционалами от φ . После момента времени b концентрация ксенона может возрастать в течение нескольких часов благодаря нарушению равновесия концентрации, вызванному остановкой.

Уравнения, описывающие эту фазу процесса, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -a_{12}I, & I(b) &= c_3; \\ \frac{dx}{dt} &= a_{12}I - a_3x, & x(b) &= c_4. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

График функции $x(t)$ при $t \geq b$ имеет вид, показанный на рис. 78. В этом случае

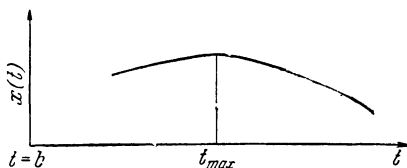


Рис. 78.

нетрудно определить значение t , при котором достигается максимум x для $t \geq b$. Обойдем, однако, на время эту задачу и обозначим этот максимум через $p(c_3, c_4)$. Ниже мы

рассмотрим задачу определения $p(c_3, c_4)$ в более общем случае, когда уравнения (8.26) являются нелинейными.

Мы хотим определить $\varphi(t)$ на интервале $0 \leq t \leq b$, так чтобы минимизировать $p(c_3, c_4)$, причем на φ наложено ограничение вида

$$\left| \frac{d\varphi \cdot dt}{\varphi} \right| \leq k_1. \quad (8.27)$$

Это сложная неявная вариационная задача с обычными при-
сущими ей трудностями.

Вводя функцию

$$f(c_1, c_2, b) = \min_{\varphi} p(c_3, c_4), \quad (8.28)$$

мы имеем рекуррентное соотношение

$$\left. \begin{aligned} f(c_1, c_2, b) = \min_{\varphi(0)} \{ & f[c_1 + \Delta(a_{11}\varphi(0) - a_{12}c_1), \\ & c_2 + \Delta(a_{21}\varphi + a_{12}c_1 - (a_3 + a_4\varphi)c_2, b - \Delta] \} + o(\Delta). \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Это приводит к приемлемой вычислительной схеме при ус-
ловии, если мы обладаем вычислительной машиной, способ-
ной справиться с функциями двух переменных.

11. МАКСИМАЛЬНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Обсудим теперь детальнее задачу определения функции $p(c_3, c_4)$. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= g_1(x_n, y_n), & x(0) &= c_1, \\ y_{n+1} &= g_2(x_n, y_n), & y(0) &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

и предположим, что мы хотим определить величину $\max_{n \geq 0} |x_n|$.
Эта величина, очевидно, является функцией начальных зна-
чений c_1, c_2 . Обозначим

$$f(c_1, c_2) = \max_{n \geq 0} |x_n|. \quad (8.31)$$

Для того чтобы получить рекуррентное соотношение для
этой функции, проанализируем, что мы делали до сих пор.
При изучении линейных операторов мы полагаем для $N \geq 1$
и всех x_i

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_1 + x_2 + \dots + x_N \quad (8.32)$$

и используем функциональное уравнение

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N) = L(L(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}), x_N). \quad (8.33)$$

Заметим теперь, что оператор взятия максимума

$$M(x_1, x_2, \dots, x_N) = \max[x_1, x_2, \dots, x_N] \quad (8.34)$$

удовлетворяет соотношению

$$M(x_1, x_2, \dots, x_N) = M(M(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}), x_N). \quad (8.35)$$

Это соображение позволяет нам решать многие задачи, включающие функционал максимизации с помощью, по существу, той же методики, которую мы использовали при изучении процессов с линейной функцией полезности. Например, функция, определенная в (8.31), удовлетворяет уравнению

$$f(c_1, c_2) = \max [c_1, f(g_1(c_1, c_2), g_2(c_1, c_2))]. \quad (8.36)$$

Для вычисления $f(c_1, c_2)$ мы можем использовать метод последовательных приближений, основанный на введении времени, как в § 13, или на каких-либо других приемах.

12. МАКСИМАЛЬНАЯ ДАЛЬНОСТЬ

Существует немало интересных процессов, в которых может быть использован метод функциональных уравнений, дающий новый аналитический подход и экономичный вычислительный метод. Среди них много траекторных процессов, в которых внимание сосредоточено на определении максимальной дальности, минимального промаха и т. п.

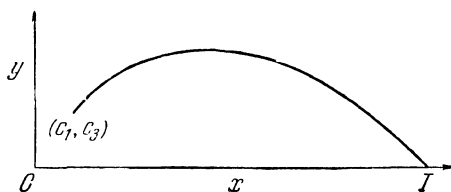


Рис. 79.

Стандартный подход к таким задачам заключается в вычислении траектории в целом, а затем в определении желаемых специфических характеристик. В качестве простого примера такой совершенной методики, основанной на использовании функциональных уравнений, методики, которая приводит к получению только желательной информации и не дает какой-либо другой, рассмотрим следующую задачу.

Снаряд выпускается вертикально вверх над плоской землей и подвергается тормозящему действию силы тяжести и

сил сопротивления. Мы хотим определить максимальную высоту, которой он достигает.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - h\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v, \quad (8.37)$$

где $h(v)$ — сила сопротивления, зависящая от скорости v . Пусть

$$f(v) — \text{максимальная высота,} \\ \text{соответствующая начальной скорости } v. \quad (8.38)$$

Рассматривая Δ как бесконечно малую величину, получим уравнение

$$f(v) = v\Delta + f[v - (g + h(v)\Delta)] + o(\Delta). \quad (8.39)$$

Разлагая в ряд и считая $\Delta \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению

$$f'(v) = \frac{v}{g + h(v)}, \quad f(0) = 0, \quad (8.40)$$

которое дает

$$f(v) = \int_0^v \frac{v_1 dv_1}{g + h(v_1)} \quad (8.41)$$

(см. рис. 79).

Аналогичным образом, рассматривая плоское движение, описываемое уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= g_1\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), & x(0) &= c_1, & x'(0) &= c_2, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= g_2\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), & y(0) &= c_3, & y'(0) &= c_4, \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

мы можем тем же способом определить максимальную дальность и высоту. Обсуждение этого вопроса может быть найдено в работах, перечисленных в конце главы.

13. МИНИМУМ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Рассмотрим, наконец, задачу регулирования, включающую минимизацию максимального отклонения.

Предположим, что уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} = g\left(\frac{du}{dt}, u, v\right), \quad u(0) = c_1, \quad u'(0) = c_2 \quad (8.43)$$

и желательно выбрать v , на которое наложено ограничение $|v(t)| \leq m$; $0 \leq t \leq T$, так, чтобы минимизировать функционал

$$J(v) = \max_{0 \leq t \leq T} |u|. \quad (8.44)$$

Обозначим

$$\min_v J(v) = f(c_1, c_2, T).$$

Тогда приближенное функциональное уравнение имеет вид

$$f(c_1, c_2, T) = \max [c_1, \min_{|v(0)| \leq m} [f(c_1 + c_2 \Delta), c_2 + g(c_1, c_2, v(0) \Delta, T - \Delta)]] + o(\Delta). \quad (8.45)$$

Это соотношение позволяет нам получить численное решение вариационной задачи.

14. ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Мы уже указывали, что единственным препятствием для прямого численного решения широкого класса вариационных задач с помощью динамического программирования является размерность вектора состояний системы. Например, если x и y имеют размерность N , то процесс регулирования, направленный на минимизацию функционала вида

$$J(y) = g[x(T)] + \lambda \int_0^T k(y) dt \quad (8.46)$$

по всем y , подчиненным условию

$$\frac{dx}{dt} = h(x, y), \quad x(0) = c, \quad (8.47)$$

включает табулирование функций N переменных $f(c, T)$. Если $N=1$, то это тривиально; если $N=2$, то это доступно, но не тривиально; и если $N \geq 3$, то требуются изобретательность и аналитические усилия, при условии, что мы не используем очень грубую сетку или не ограничиваемся очень малой областью фазового пространства.

Постараемся обосновать следующее важное соображение: если (8.47) является *линейным* уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + y, \quad x(0) = c \quad (8.48)$$

и $g[x(T)]$ в действительности является функцией только k компонент $x(T)$, скажем $x_1(T), x_2(T), \dots, x_k(T)$, то тогда вариационная задача может быть решена с помощью функциональных уравнений с рассмотрением только функций k переменных.

Основная идея состоит в том, что линейность (8.48) позволяет нам отделить влияние начальных условий от влияния внешних сил. Как известно, мы можем найти из (8.48)

$$x = X(t)c + \int_0^t x(t)X^{-1}(s)y(s)ds, \quad (8.49)$$

где $X(t)$ — матрица, удовлетворяющая однородной системе

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \quad x(0) = I. \quad (8.50)$$

Тогда

$$x(T) = b + \int_0^T K(s)y(s)ds, \quad (8.51)$$

где b и K зависят от T . Отсюда мы видим, что задача теперь сводится к минимизации функционала

$$\begin{aligned} g[x_1(T), x_2(T), \dots, x_k(T)] + \lambda \int_0^T h(y)dt = \\ = g\left[b_1 + \int_0^T \sum_{j=1}^N K_{1j}y_j(s)ds, \dots, b_k + \int_0^T \sum_{j=1}^N K_{kj}y_j(s)ds\right] + \\ + \lambda \int_0^T h(y)dt \quad (8.52) \end{aligned}$$

по всем y . Рассмотрим новую задачу о минимизации функционала

$$\begin{aligned} g\left[b_1 + \int_a^T \left(\sum_{j=1}^N K_{1j}y_j(s)\right)ds, \dots, b_k + \int_a^T \sum_{j=1}^N K_{kj}y_j(s)ds\right] + \\ + \lambda \int_a^T h(y)dt. \quad (8.53) \end{aligned}$$

Обозначим искомый минимум через $f(b_1, b_2, \dots, b_k, a)$. Тогда, используя принцип оптимальности, получим:

$$f(b_1, b_2, \dots, b_k, a) = \\ = \min_{\{v(a)\}} \left[\lambda h(y(a)) \Delta + f\left(b_1 + \Delta \left[\sum_{j=1}^N K_{1j} y_j(a) \right], \dots \right) \right] + o(\Delta) \quad (8.54)$$

— функциональное уравнение, включающее функции только k переменных.

15. ОБСУЖДЕНИЕ

В дополнение к прямому приложению этой методики возможно получить и другие важные результаты. Во-первых, если функция критерия $g[x(T)]$ является квадратичной, то вариационная задача приводится к линейному уравнению Эйлера, которое решается в явном виде. Однако явное аналитическое решение линейной системы большой размерности не является простым делом. Следовательно, даже в этом случае будет значительно более выгодно использовать подход с точки зрения функциональных уравнений. Оказывается, что предельная форма уравнения (8.54) допускает явное решение, так как функция $f(b_1, b_2, \dots, b_k, a)$ является *квадратичной формой* относительно b_i с коэффициентами, зависящими от a . Эти коэффициенты удовлетворяют системе квадратично нелинейных дифференциальных уравнений размерности $\frac{k(k+1)}{2}$ с начальными условиями. В то же время из вариационных уравнений получается линейная система размерности $2N$ с двухточечными краевыми условиями.

Затем результаты предшествующего параграфа могут быть двумя путями использованы как исходный пункт для метода *последовательных приближений*. Во-первых, мы можем аппроксимировать общую функцию критерия функцией, зависящей только от k из N компонент; во-вторых, мы можем аппроксимировать исходное нелинейное уравнение линейным. Мы не будем рассматривать эти приемы в дальнейшем, так как не имели опыта их использования.

16. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Предположим теперь, что физическая система, которую мы пытаемся регулировать, подвергается внутренним и внешним воздействиям, происхождение и влияние которых не полностью известно. Реальное положение дел, конечно, всегда таково. Однако во многих ситуациях неопределенность производит столь малый эффект, что им можно пренебречь. Предположим, что мы имеем дело с ситуацией, где этого нет.

Один из путей преодоления трудностей состоит во введении понятия *случайных* (или *стохастических*) воздействий. Это весьма искусное изобретение математической теории вероятностей позволяет нам получить большое число важных результатов. Оказывается, что даже при рассмотрении многих процессов, где причинно-следственные отношения известны, предположение о стохастических свойствах приводит к большим математическим упрощениям. Выдающимся примером этого является статистическая механика Гиббса.

В дальнейшем мы будем, как и ранее, предполагать, что читатель знаком с основами теории вероятностей и элементарными сведениями о понятии случайной величины. Для того чтобы избежать усложнений, которые являются побочными для анализируемого вопроса, мы будем рассматривать только дискретные во времени процессы. В последующих численных расчетах (глава IX) мы будем рассматривать только простейшие дискретные законы распределения. Всюду будут требоваться только зачаточные знания из теории вероятностей.

Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$x_{n+1} = g(x_n, y_n, r_n), \quad (8.55)$$

где x_n есть вектор состояний системы, y_n — вектор управлений и r_n — случайный вектор, отражающий случайное воздействие, приложенное к системе на n -м шаге. Первоначально мы будем считать r_n независимыми. Далее будет показано, как может быть введена корреляция.

Вновь, как и ранее, мы предполагаем, что эффект выбора u , когда система находится в состоянии x , состоит в «доходе» или в «отклонении»

$$h(x, y, r). \quad (8.55a)$$

Здесь r — тот же самый случайный вектор, что и в (8.55). Принимая для простоты аддитивность функции полезности, мы получим в качестве полной меры для N -шагового процесса выражение

$$R_N = h(x_1, y_1, r_1) + h(x_2, y_2, r_2) + \dots + h(x_N, y_N, r_N). \quad (8.56)$$

Так как эта величина сама является случайной, мы не можем сразу поставить вопрос о ее максимизации или минимизации. Действительно, при изучении стохастических процессов нет единственного способа для постановки точной задачи оптимизации. Один способ состоит в том, чтобы использовать в качестве функции критерия математическое ожидание величины R_N по всем случайным величинам r_N . Мы будем делать именно так, предупреждая вместе с тем читателя об имеющемся здесь элементе произвола. Другим важным критерием является вероятность того, что R_N превзойдет некоторую заданную величину. Одно из преимуществ метода функциональных уравнений состоит в том, что он позволяет использовать реалистические критерии, не беспокоясь об удобствах анализа.

Использование математических ожиданий является разумным потому, что в математической теории вероятностей существует большая группа теорем, которые утверждают, что во многих случаях поведение системы за длительный период времени все более и более приближается к ее среднему поведению. С другой стороны, известно также, что при изучении нелинейных систем это может и не иметь места. Следовательно, линейные функции полезности, т. е. математические ожидания случайных величин, должны использоваться с большой осторожностью. Существенно понимать, что мы следуем только одному из многих путей. Слишком часто в приложениях математики к изучению физических явлений частные методы слепо принимаются за истину, причем часто забывается о том, что существуют и другие методы.

17. В ЧЕМ СОСТОИТ ОПТИМАЛЬНАЯ ПОЛИТИКА?

Нетрудно заметить, что предшествующее обсуждение еще не позволяет нам изучить оптимальную политику регулирования. Кроме того, еще не ясно, что мы понимаем под *оптимальной* политикой.

Для того чтобы разъяснить этот вопрос, обратимся к некоторым ранее сделанным замечаниям. При изучении нами вариационного исчисления и динамического программирования в главе, посвященной траекторным задачам, и вообще во всей предшествующей части работы, посвященной детерминированным процессам регулирования, мы указывали на то, что возможно определить y_i все сразу или один за другим, как функции векторов состояний системы. Тожественность этих двух подходов являлась следствием фундаментального понятия двойственности между точками и направлением в евклидовом пространстве. Иначе говоря, кривую можно рассматривать и как геометрическое место точек, и как огибающую касательных.

Когда мы вводим в рассмотрение стохастические явления, положение радикально меняется. Вообще указанные два подхода являются резко различными в силу неопределенности будущего. Заимствуя классический подход, мы можем поставить следующую задачу.

Определить а priori последовательность векторов y_1, y_2, \dots, y_N , которые минимизируют функцию

$$R(y_1, y_2, \dots, y_N) = E \{R_N\}_{r_i}.$$

В этой формулировке мы отбрасываем возможность использования для выработки наших решений знания действительного состояния системы в любой частный момент времени. Легко видеть, что могут возникнуть ситуации, в которых эта постановка является единственной из возможных, так как требуемая информация может быть недоступной.

Вместо задач этой природы мы хотим поставить задачи, в которых принимается во внимание *обратная связь*, позволяющая использовать знание действительных значений некоторых или всех координат системы на каждом шаге. Мы увидим тогда, что решения должны приниматься следующим образом. Начиная с состояния x_1 , принимаем решение y_1 . Комбинация x_1, y_1 и случайного вектора r_1 в силу (8.54) приводит в новое состояние x_2 . Начиная с известного x_2 , этот процесс повторяется. Теперь желательно определить последовательность векторов y_n , которая минимизирует математическое ожидание R_N .

Пожалуй, удивительно, что первая задача, которая включает только минимизацию на пространстве конечной размерности, подлинно трудна, в то время как вторая задача, которая требует минимизации на пространстве функций, пространстве политик $y_1(x_1)$, $y_2(x_2)$ и т. д., поддается исследованию с помощью метода функциональных уравнений динамического программирования.

Это хороший пример того, что более изощренное и более реалистичное рассмотрение действительных физических процессов может быть значительно более легким математически, чем рассмотрение, которое кажется заметно более податливым для математического исследования. Это только одна из причин, по которой важно изучить много различных математических формулировок, прежде чем погрузиться в море уравнений и поток вычислений.

18. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вводя функцию

$$f_N(c) = \min_{y, r_i} E \{R_N\}, \quad (8.57)$$

где $E \{ \}$ означает операцию определения математического ожидания по всем r_n , мы сможем теперь для описанного выше процесса с обратной связью записать некоторые уравнения обычного вида.

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_1(c) &= \min_{y_1, r_1} E \{h(c, y, r_1)\}, \\ f_N(c) &= \min_{y_1, r_1} E \{h(c, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1))\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Предположим, что r_n имеют общую функцию распределения $G(r)$. Тогда соотношения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(c) &= \min_{y_1} \int h(c, y_1, r) dG(r), \\ f_N(c) &= \min_{y_1} \int [h(c, y_1, r) + f_{N-1}(g(c, y_1, r))] dG(r). \end{aligned} \right\} \quad (8.59)$$

Отсюда следует, что если не считать введения некоторых усредненных величин, уравнения формально остаются точно такими же, что и в детерминированном случае.

19. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Для того чтобы привести (8.59) к арифметической форме, примем, что распределение $G(r)$ является дискретным. Тогда вместо $G(r)$ мы имеем совокупность вероятностей $[p_1, p_2, \dots, p_M]$, где p_i есть вероятность того, что r принимает значение r_i .

В этом случае (8.59) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(c) &= \min_{y_1} \left[\sum_{j=1}^M p_j h(c, y_1, r_j) \right], \\ f_N(c) &= \min_{y_1} \left[\sum_{j=1}^M p_j \{ h(c, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_j)) \} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.60)$$

Отсюда следует, что численное решение для стохастических процессов регулирования почти в точности совпадает с обычным решением для дискретного случая, хотя требуется некоторое дополнительное время для производства операции усреднения, входящей в (8.60).

20. КОРРЕЛЯЦИЯ

Предположим теперь, что случайные векторы не являются независимыми. Простейшим шагом в направлении учета их взаимосвязи является, возможно, предположение о том, что распределение r_n зависит от значений r_{n-1} , но не зависит от каких-либо других r_i . На $(n - m)$ -м шаге мы должны тогда добавлять к вектору координат системы значения r_{n-1} . Векторы x_n и r_{n-1} определяют «состояние» системы в момент n . Как мы увидим, при изучении процессов регулирования с приспособлением понятие «состояние системы» поддается еще большему обобщению.

Пусть $G(r_n, r_{n-1})$ представляет собой функцию распределения r_n при заданном значении r_{n-1} . Тогда мы можем ввести функцию

$$f_N(c, r_0) = \min_{y, r} E \{ R_N \} \quad (8.61)$$

и вместо (18.3) получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} f_1(c, r_0) &= \min_{y_1} \int h(c, y_1, r_1) dG(r_1, r_0), \\ f_N(c, r_0) &= \min_{y_1} \int [h(c, y_1, r_1) + f_{N-1}(g(c, y_1, r_1))] \times \\ &\quad \times dG(r_1, r_0). \end{aligned} \right\} \quad (8.62)$$

Введение эффекта корреляции усложняет численное решение, если предполагается, что r может принимать большое число значений. Если, однако, r есть скаляр, принимающий два или три значения, например ± 1 , или 1, 0 и -1 , то тогда корреляция вносит лишь несущественные дополнительные трудности.

21. ПРИМЕР (ПО АОКИ)

Проиллюстрируем это рассмотрение примером стохастического процесса регулирования, глубоко изученного Аоки. Мы рассмотрим также адаптивный вариант этого процесса. Детальные численные результаты могут быть найдены в работах Аоки, перечисленных в библиографии, приведенной в конце этой главы. Некоторые частные случаи рассмотрены в главе IX.

Предположим, что r есть скалярная случайная величина, которая может принимать только значения ± 1 . Пусть c_+ означает величину, получаемую при выборе y_1 , когда $r = +1$, и c_- — величину, получаемую, когда $r = -1$.

Рассмотрим процесс регулирования, в котором мы хотим минимизировать математическое ожидание функции φ от конечного состояния x_N . Что касается статистических свойств r , то пусть

$$\begin{aligned} p & \text{ равно вероятности того, что } r = +1, \\ \text{так что } (1-p) & \text{ — вероятность того, что } r = -1. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Тогда если мы введем функцию

$$f_N(c) = \min E \{ \varphi(x_N) \}, \quad (8.64)$$

то для нее имеют место соотношения

$$f_1(c) = \min_{y_1} [p \varphi(c_+) + (1-p) \varphi(c_-)], \quad (8.65)$$

$$f_N(c) = \min_{y_1} [p f_{N-1}(c_+) + (1-p) f_{N-1}(c_-)]. \quad (8.66)$$

В дальнейшем мы будем сравнивать эти результаты с теми, которые получаются для процесса управления с адаптацией.

22. ИГРЫ ПРОТИВ ПРИРОДЫ

Мы попытались преодолеть отсутствие детерминированной связи между причиной и следствием путем введения случайных величин с известными распределениями. Нетрудно представить себе ситуацию, когда мы знаем так мало, что нельзя даже считать, что распределение нам известно. Одним из возможных путей в этом случае, причем самым пессимистическим путем, является предположение, что неизвестные воздействия всегда будут наименее благоприятными из возможных. Иными словами, мы можем предположить, что некоторый противник, которого мы будем (возможно, несправедливо) именовать Природой, выбирает распределение вероятностей на каждом этапе таким способом, чтобы сделать максимальным наше минимальное отклонение, или минимизировать наш максимальный доход.

Таким образом, мы представляем себе процесс регулирования этого типа как *игру против природы*. Тот тип процесса регулирования с обратной связью, который мы исследовали на предшествующих страницах, становится многошаговой игрой, которая может быть легко изучена с помощью метода функциональных уравнений, неоднократно нами использованного.

Читатель, интересующийся этими вопросами, найдет детальное рассмотрение в работах, указанных в конце главы. Мы здесь будем использовать другой подход.

23. ПРОЦЕССЫ С АДАПТАЦИЕЙ

Мы далеко не в полной мере использовали многошаговый характер регулирования с обратной связью в качестве нашего преимущества в борьбе с незнанием. Посмотрим, не сможем ли мы ввести в нашу математическую модель тот факт, что возможно обучение свойствам процесса в течение времени, когда он протекает.

Процесс, в котором это происходит, именуется процессом с приспособлением (адаптацией) или *адаптивным* процессом. Для того чтобы сформулировать свойства процессов этого типа в аналитически строгих терминах, мы обобщим понятие вектора состояний системы, которое имело для нас такое значение, введением понятия *набор информации* (*information pattern*).

Этот набор информации состоит не только из наших точных сведений, но и из всей неточной информации, которая нами собрана. Вместо того чтобы рассматривать общую ситуацию, которая приводит к различного рода усложнениям, мы исследуем процесс регулирования, описанный в § 21, но в адаптивном варианте.

Мы предполагаем, что вероятность p заранее не известна. Вместо этого предположим, что мы обладаем априорным распределением вероятностей для p , скажем $H(p)$. Кроме того (именно в этом и заключается адаптация), мы будем считать, что нам известно, как исправить эту априорную оценку на основе наблюдаемых нами случайных эффектов.

Предполагается, что случайная величина r может принимать только два значения: $+1$ и -1 . Если реализуется значение $+1$, то мы заменим $H(p)$ новой функцией распределения

$$dH_+(p) = \frac{p dH(p)}{\int_0^1 p dH(p)}, \quad (8.67)$$

если же реализуется $r = -1$, то $H(p)$ заменяется через

$$dH_-(p) = \frac{(1-p) dH(p)}{\int_0^1 (1-p) dH(p)}. \quad (8.68)$$

Это преобразование может быть оправдано различными способами, но должно быть совершенно ясно, что это не единственное преобразование и необязательно наилучшее. Однако оно весьма правдоподобно и является очень простым.

Набор информации на каждом этапе процесса регулирования состоит из вектора состояний s и из априорной функции распределения $H(p)$. Задавая набор информации, приведенное выше правило адаптации и предписанную функцию (критерий) оценки, мы хотим определить оптимальный процесс регулирования с адаптацией.

24. АДАПТИВНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Рассмотрим теперь процесс, описанный в § 21, но с учетом приспособления. Мы обозначим через $f_N(c, dH(p))$ математическое ожидание функции $\varphi(x_N)$ от конечных значений координат, полученное при оптимальной политике. Математическое ожидание определяется по множеству априорных функций распределения, получаемых по ходу развертывания процесса.

Вместо вероятности p мы имеем ожидаемую вероятность

$$\bar{p} = \int_0^1 p dH(p). \quad (8.69)$$

Тогда имеют место соотношения

$$f_1(c, dH(p)) = \min_y [\bar{p}\varphi(c_+) + (1 - \bar{p})\varphi(c_-)] \quad (8.70)$$

и для $N \geq 2$

$$\begin{aligned} f_N(c, dH(p)) = \min_y \left[\bar{p} f_{N-1} \left(c_+, \frac{p dH(p)}{\int_0^1 p dH(p)} \right) + \right. \\ \left. + (1 - \bar{p}) f_{N-1} \left(c_-, \frac{(1-p) dH(p)}{\int_0^1 (1-p) dH(p)} \right) \right]. \quad (8.71) \end{aligned}$$

Мы видим, что тот же аппарат, который был использован для детерминированных и стохастических процессов регулирования, может быть применен и для исследования процессов регулирования с адаптацией.

25. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

На протяжении значительной части предшествующих страниц мы бились над задачами, связанными с использованием функций многих переменных для вычислительных целей. Как же тогда мы используем функции от функций, типа появившихся в (8.71)? Ответ, конечно, таков: мы не можем их ис-

пользовать непосредственно. Мы должны каким-либо способом привести их к функциям конечного числа переменных, а реально — к функциям небольшого числа переменных.

В одних случаях это может быть сделано легко, в других — только с использованием весьма совершенных методов; для некоторых же задач в настоящее время вообще не существует никакой методики. В данном случае мы можем произвести это существенное сокращение благодаря специальной структуре процесса.

После $m + n$ этапов, в которых m раз наблюдалось $r = +1$ и n раз $r = -1$, начальное априорное распределение $H(p)$ преобразуется в распределение вида

$$\frac{p^m (1-p)^n dH(p)}{\int_0^1 p^m (1-p)^n dH(p)}. \quad (8.72)$$

Следовательно, вместо функций распределения могут быть использованы числа m, n . Набор информации может быть заменен вектором текущих состояний и числом наблюдавшихся реализаций $+1$ или -1 .

Рекуррентное соотношение (8.71) можно теперь переписать в виде

$$f_N(c, m, n) = \min_y [p_{m+} f_{N-1}(c_+, m+1, n) + \\ + (1-p_{mn}) f_{N-1}(c_-, m, n+1)], \quad (8.73)$$

где

$$p_{mn} = \frac{\int_0^1 p^{m+1} (1-p)^n dH(p)}{\int_0^1 p^m (1-p)^n dH(p)}. \quad (8.74)$$

Хотя мы теперь имеем дело с функцией трех переменных, но сетка переменных является «расширяющейся», так как (m, n) переходит только в $(m+1, n)$ или в $(m, n+1)$.

Рассмотрение различных приемов, с помощью которых можно рассматривать эту ситуацию, имеется в работе Аоки, указанной в библиографии в конце главы.

26. ТЕОРИЯ СВЯЗИ И ИНФОРМАЦИИ

Основная проблема нашей цивилизации состоит в передаче информации от одного человека к другому или от одной машины к другой. Возможно, наиболее трудно преодолимой и ставящей в тупик частью этой проблемы является само определение того, что мы понимаем под *информацией* и как мы договоримся ее измерять.

К счастью, в некоторых случаях имеется очень простой способ преодоления этой трудности. Вместо того чтобы пытаться изучать информацию как «улыбку чеширского кота»*), мы рассмотрим действительный физический процесс, в котором информация используется для выработки решений. Величина информации может быть тогда измерена через эффективность решений.

Таким образом, полезность информации зависит от ее применения — это наиболее разумная концепция!

Рассмотрим процесс передачи сообщений как совокупность трех элементов: источника сигналов, канала связи, который преобразует сигналы, исходящие из источника, в другие сигналы, и приемника, который интерпретирует сигналы для наблюдателя. Наблюдатель делает выводы на основании сигналов, которые он принимает. Эти решения определяют состояние другой системы S .

Для того чтобы свести схему к точной математической задаче, сделаем следующее. В любой частный момент времени источник испускает один из K различных сигналов, которые мы обозначим символами $i = 1, 2, \dots, K$. Канал связи в силу различных внутренних несовершенств и внешних воздействий преобразует сигнал i в сигнал j ($j = 1, 2, \dots, M$) с вероятностью p_{ij} . Первоначально мы будем считать ее известной. От наблюдателя после получения этого сигнала требуется принять решение, которое действует на подсистему S . Это решение основывается на знании им вероятности r_i , с которой может быть передан i -й сигнал, заранее указанного набора вероятностей искажений в канале p_{ij} и вектора состояний системы x . Результат решения состоит

*) Улыбка чеширского кота, по сказке Л. Кэрролла «Алиса в стране чудес», существовала отдельно от упомянутого кота. (Прим. ред.)

в преобразовании x в случайный вектор z , распределение которого определяется исходным сигналом, полученным сигналом, нынешним состоянием системы и решением.

27. ПОЛЕЗНОСТЬ КАК ФУНКЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Для того чтобы сравнить различные конструкции, мы должны иметь возможность оценивать свойства системы связи. Эта оценка наиболее естественно выражается через ее использование. Хотя в некоторых специальных случаях возможно приписать сравнительные числовые характеристики передатчикам, приемникам или каналам связи безотносительно к другим компонентам системы, но, вообще говоря, для реалистичных и важных процессов необходимо рассматривать полную систему как одно целое. Как мы увидим, такое описание проблемы полезно не только для разъяснения наших идей; оно указывает нам и тот математический аппарат, который мы будем использовать.

28. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предположим, что мы имеем дело с многошаговым процессом, на каждом шаге которого сигнал испускается источником, преобразуется в канале связи, принимается наблюдателем, который на этой основе вырабатывает решение. Этот процесс продолжается N шагов, в конце которых процесс оценивается с помощью заданной функции $\varphi(z_N)$ от конечного состояния z_N системы S .

Мы введем последовательность функций

$$f_N(x) — \text{равных математическому ожиданию } \varphi(z_N), \text{ полученному в результате } N\text{-шагового процесса, начинающегося, когда } S \text{ находится в состоянии } x, \text{ при использовании оптимальной политики, для } N=1, 2 \text{ и всех допустимых } x. \quad (8.75)$$

Пусть $G(i, j, x, q; z)$ означает функцию распределения для z , где смысл индексов i, j и x указан выше, а q означает выбор решения. Тогда в этих терминах мы имеем:

$$f_1(x) = \max_q \left[\sum_{i=1}^K r_i \left\{ \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dG(i, j, x, q; z) \right\} \right] \quad (8.76)$$

и

$$f_N(x) = \max_q \left[\sum_{i=1}^K r_i \left\{ \sum_{j=1}^M p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} f_{N-1}(z) dG(l, j, x, q; z) \right\} \right] \quad (8.77)$$

для $N=2, 3, \dots$

29. ПРОЦЕСС С АДАПТАЦИЕЙ

Рассмотрим теперь следующий процесс — относительно простой вариант ситуации, в которой мы не имеем полной информации о свойствах канала связи.

Предположим, что источник испускает два типа сигналов, нули и единицы. При прохождении через канал связи имеется вероятность p точной передачи, т. е. 0 преобразуется в 0 или 1 в 1. Наблюдатель после получения сигнала 0 или 1 держит пари на некоторую сумму денег (любую от нуля до полной суммы, имеющейся в его распоряжении), что сигнал, который им получен, совпадает с посланным. Предположим, что имеются равные шансы — обстоятельство, несущественное для этого рассмотрения.

Предполагая, что этот процесс повторяется N раз, мы хотим найти политику, которая максимизирует математическое ожидание заданной функции φ от конечной суммы денег. Имеется много способов сформулировать задачи этого типа. Мы начнем следующим образом. Основываясь на какой-то доступной информации, мы предположим, что априорное распределение p есть $G(p)$, которая не является ступенчатой функцией с единственным скачком в точке p_0 .

Мы далее предположим, что успешно спорящий игрок преобразует оценку для p от $dG(p)$ к $pdG(p)/\int_0^1 pdG(p)$, а неудачно спорящий — от $dG(p)$ к $(1-p)dG(p)/\int_0^1 (1-p)dG(p)$.

При этих предположениях мы хотим определить политику, которая максимизирует математическое ожидание заданной функции от конечной суммы денег.

30. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пусть x — исходная наличная сумма денег. Введем функцию

$f_N(x, m, n)$ — математическое ожидание $\varphi(z_N)$, где z_N — количество денег после N шагов при начальном количестве x и использовании оптимальной политики. При этом задана информация, что произошло m удачных и n неудачных пари. (8.78)

Введем обозначение

$$q_{mn} = \frac{\int_0^1 p^{m+1} (1-p)^n dG}{\int_0^1 p^m (1-p)^n dG}, \quad q'_{mn} = 1 - q_{mn}. \quad (8.79)$$

Тогда мы получим следующие рекуррентные соотношения:

$$f_N(x, m, n) = \max_{0 \leq y \leq x} [q_{mn} f_{N-1}(x+y, m+1; n) + q'_{mn} f_{N-1}(x-y, m, n+1)], \quad (N=2, 3, \dots) \quad (8.80)$$

и

$$f_1(x, m, n) = \max_{0 \leq y \leq x} [q_{mn} \varphi(x+y) + q'_{mn} \varphi(x-y)]. \quad (8.81)$$

Здесь y — ставка в пари.

31. СТЕПЕННОЙ ЗАКОН

Задача может быть решена в явном виде, если $\varphi(z) = az^b$, $a, b > 0$, или в предельном случае $\varphi(z) = \log z$. Рассмотрим сначала случай степенной функции. Для $a=1$ мы имеем:

$$\begin{aligned} f_1(x, m, n) &= \max_{0 \leq y \leq x} [q_{mn} (x+y)^b + q'_{mn} (x-y)^b] = \\ &= x^b \max_{0 \leq y \leq 1} [q_{mn} (1+y)^b + q'_{mn} (1-y)^b]. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Легко теперь доказать по индукции, что

$$f_N(x, m, n) = C_N(m, n) x^b, \quad (8.83)$$

где последовательность $\{C_N(m, n)\}$ определяется соотношением

$$C_N(m, n) = q_{mn} C_{N-1}(m+1, n) + q'_{mn} C_{N-1}(m, n+1) + \max_{0 \leq y \leq 1} [q_{mn} \log(1+y) + q'_{mn} \log(1-y)]. \quad (8.84)$$

32. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ЗАКОН

Сходным образом в логарифмическом случае мы можем показать, что

$$f_N(x; m, n) = \log x + C_N(m, n), \quad (8.85)$$

где

$$C_N(m, n) = q_{mn} C_{N-1}(m+1, n) + q'_{mn} C_{N-1}(m, n+1) + \max_{0 \leq y \leq 1} [q_{mn} \log(1+y) + q'_{mn} \log(1-y)]. \quad (8.86)$$

Хотя явно оценить $\{C_N(m, n)\}$ нелегко, нетрудно определить оптимальную политику. Мы видим, что

$$y = \begin{cases} (2q_{mn} - 1)x & \text{при } q_{mn} > \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } q_{mn} \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

33. ДАЛЬНЕЙШИЕ УПРОЩЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если начальное распределение задано в форме

$$dG(p) = \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)} dp; \quad a, b > 0, \quad (8.87)$$

где $B(a, b)$ — бета-функция (этот выбор позволяет с большой гибкостью описывать начальную кривую распределения), то мы можем получить:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{\int_0^1 p^{m+a} (1-p)^{n+b-1} dp}{\int_0^1 p^{m+a-1} (1-p)^{n+b-1} dp} = \frac{B(m+a+1, n+b)}{B(m+a, n+b)} = \\ &= \frac{m+a}{m+a+n+b}. \end{aligned} \quad (8.88)$$

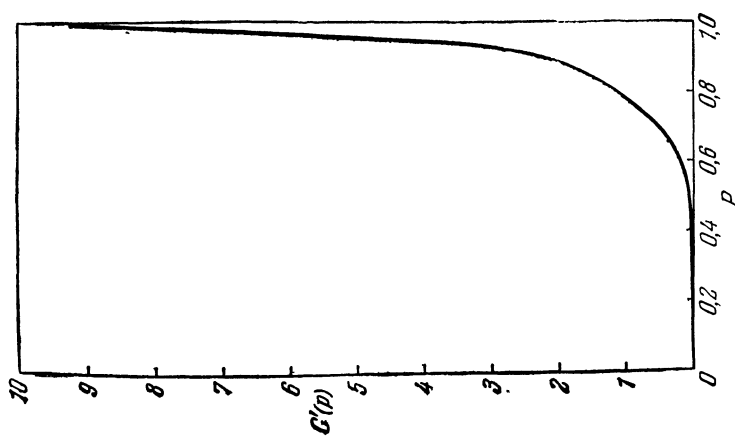
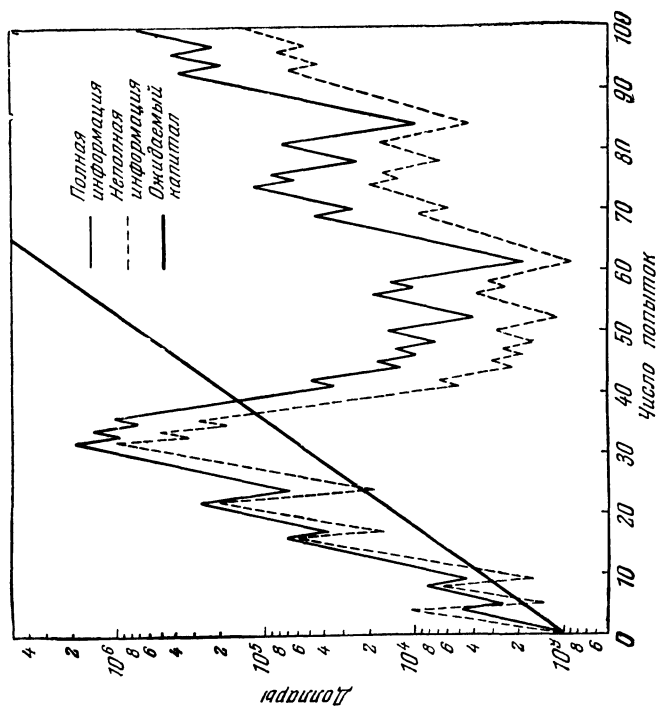
Рис. 80. Начальная плотность для p .

Рис. 81.

Для логарифмического случая это означает, что оптимальная полигика (после m выигрышей и n проигрышей) состоит в том, чтобы поставить долю от имеющейся суммы, равную

$$\frac{m + a - (n + b)}{m + a + n + b} \quad (8.89)$$

при условии, что $q_{mn} > \frac{1}{2}$, или не ставить ничего, если $q_{mn} \leq \frac{1}{2}$. Это приводит к очень простому способу изменения априорной вероятности успеха от попытки к попытке.

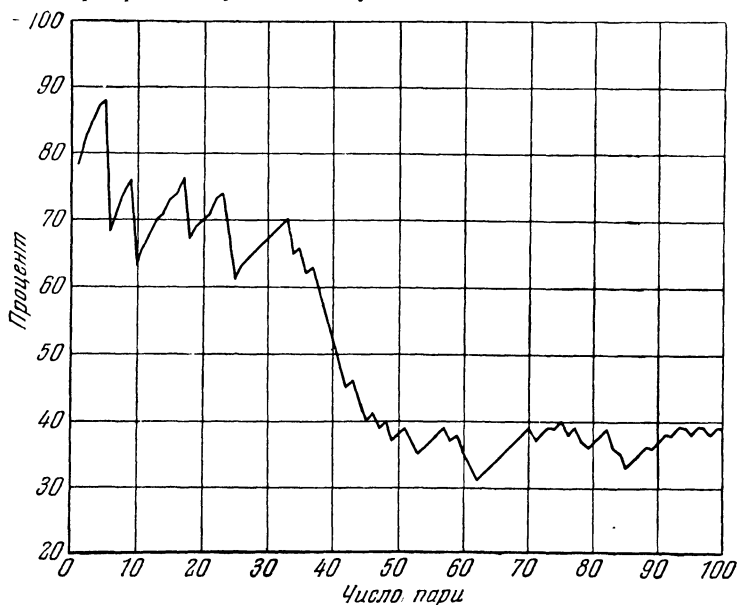


Рис. 82.

Численный эксперимент был проведен для значений $a=4$, $b=1/2$, которые дают кривую $G'(p)$, имеющую форму, показанную на рис. 80. Предполагалось, что канал имеет вероятность точной передачи $p=0,75$. Тогда с помощью таблиц случайных чисел была имитирована последовательность 100 пар двумя способами: при первом было известно, что $p=0,75$, так что половина наличного капитала ставилась при

каждой возможности, во втором этих сведений не было и использовалась описанная выше схема.

Результаты показаны на рис. 81, по которому можно судить об удовлетворительности политики. На рис. 82 показано изменение доли капитала на ставку при каждом пари; после 100 пари только 68 было выиграно, так что ставилось приблизительно 40% наличного капитала, что совсем немалого ниже оптимального значения 50% .

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Детальное рассмотрение понятия регулирования с обратной связью может быть найдено в книге:

R. Bellman, *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princeton, University Press, Princeton, New Jersey, 1961 [русский перевод: Р. Беллман, *Адаптивные процессы управления*, Изд-во «Наука», 1964].

В ней имеются исчерпывающие ссылки на современную литературу.

§ 2. Дальнейшее обсуждение и библиография имеются в

H. Bateman, *On the control of an elastic fluid*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 51, 1945, pp. 601—646.

§ 4. См. монографию:

R. Bellman and J. M. Danskin, *A Survey of the Mathematical Theory of Time Lag, Retarded Control and Hereditary Processes*, The RAND Corporation, Report R-256, 1954,

и недавно вышедшую книгу:

R. Bellman and K. L. Cooke, *Differential-difference Equations*, Academic Press, Inc., New York, 1962.

§ 9. См.

R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross, *On the bang-bang control problem*, *Q. Appl. Math.*, vol. 14, 1956, pp. 11—18;
J. P. La Salle, *On time-optimal control systems*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 45, 1959, pp. 573—577,

где можно найти дальнейшую библиографию

§ 10. См.

M. Ash, R. Bellman and R. Kalaba, *On control of reactor shutdown involving minimal xenon poisoning*, *Nuclear Sci. and Engr.*, vol. 6, 1959, pp. 152—156.

§ 11. См.

R. Bellman, Notes on control processes — on the minimum of maximum deviation, *Q. Appl. Math.*, vol. 14, 1957, pp. 419—423.

§ 12. См.

R. Bellman, Functional equations and maximum range, *Q. Appl. Math.*, vol. 17, 1959, pp. 316—318.

§ 14. См.

R. Bellman, Some new techniques in the dynamic programming solution of variational problems, *Q. Appl. Math.*, vol. 16, 1958, pp. 295—305.

R. Bellman and R. Kalaba, Reduction of dimensionality, dynamic programming, and control processes, *J. Basic Engr.*, March 1961, pp. 82—84.

C. W. Merriam III, An optimization theory for feedback control system design, *Information and Control*, vol. 8, 1960, pp. 32—59.

A. T. Fuller, Optimization of non-linear control systems with transient inputs, *J. Electronics and Control*, vol. 7, 1960, pp. 465—479.

E. L. Peterson, Recent Soviet Progress in Adaptive and Optimum Control, Technical Military Planning Operation, SP-121, Santa Barbara, California, 1961.

M. Aoki, On optimal and sub-optimal policies in the choice of control forces for final-value systems, *IRE National Convention Record*, part 4, 1960, pp. 15—21.

R. Pallu de la Barriere, *Contrôle des Systèmes Dynamiques*, Faculté des Science, University of Caen, 1961.

M. Aoki, Dynamic Programming and Conditional Response Extrapolation, Second Joint Automatic Control Conference, University of Colorado, 1961.

В этой работе можно найти много других ссылок.

J. Chanugam and G. E. P. Box, Automatic Optimization of Continuous Processes, Department of Math., Princeton University Technical Report No. 38, 1960.

L. D. Berkovitz, A Variational Approach to Differential Games, *Advances in Game Theory*, Princeton, 1964, pp. 127—174.

C. M. Kashmar, E. L. Peterson, F. X. Remond, A General Approach to the Numerical Solution of Multi-dimensional Nonlinear Boundary-valued Problems, General Electric Co., Santa Barbara, California, 1960.

R. E. Kalaba, Computational Considerations for some Deterministic and Adaptive Control Processes, The RAND Corporation, Paper P-2210, 1961.

Многие дальнейшие результаты см. в

R. Beckwith, *Analytic and Computational Aspects of Dynamic Programming Processes of High Dimension*, Ph. D. Thesis, Purdue University, 1959.

§ 16. Дальнейшее обсуждение и ссылки даны в книге, упомянутой выше.

§ 21. В следующей главе мы изложим некоторые численные результаты, полученные Аоки.

§ 22. См. главу 9 книги «Динамическое программирование» по поводу многошаговых процессов с двумя участниками. Там же имеются дальнейшие ссылки.

§ 23—33. Мы следуем работам:

- R. Bellman, A mathematical formulation of variational processes of adaptive type, Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (в печати).
R. Bellman and R. Kalaba, A mathematical theory of adaptive control processes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 45, 1959, pp. 1288—1290.
R. Bellman and R. Kalaba, On adaptive control processes, IRE National Convention Record, part 4, 1959, pp. 3—11.
R. Bellman and R. Kalaba, Dynamic programming and adaptive control processes: mathematical foundations, IRE Trans. on Automatic Control, vol. AC-5, 1960, pp. 5—10.
R. Bellman and R. Kalaba, On communication processes involving learning and random duration, IRE National Convention Record, part 4, 1958.

Дальнейшее рассмотрение и ссылки имеются в книге, указанной в § 1, и в работе:

H. W. Grinnell, On the Optimum Utilization of Correlated Data by Decision Schemes in Information Channels, General Electric Company, RM-60-TM-65, Santa Barbara, California, 1960.

Рассмотрение путей, на которых динамическое программирование может быть приложено к управлению химическими процессами, дано в работах:

- R. Aris, The Optimal Design of Chemical Reactors, Academic Press Inc., New York, 1961.
R. Aris, The Optimum Conditions for a Single Reaction, Department of Chem. Engr., Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn. (не опубликовано).
R. Aris, The Optimum Design of Adiabatic Reactors with Several Beds (не опубликовано).
R. Aris, The Optimum Operating Conditions in Sequences of Stirred Tank Reactors (не опубликовано).
R. Aris, Optimum Temperature Gradients in Tubular Reactors (не опубликовано).
R. Aris, D. F. Rudd and N. R. Amundson, On optimum cross-current extraction, Chem. Engr. Science, vol. 12, 1960, p. 88.
G. C. Brown and others, Unit Operations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.

- J. Dranoff, L. Mitten, W. Stevens, L. Wanninger, Jr., Application of Dynamic Programming to Countercurrent Flow Processes, Technological Inst., Northwestern University, 1960.
- S. Dreyfus, Computational aspects of dynamic programming, Operations Research, vol. 5, 1957, pp. 409—415.
- J. Happel, Chemical Process Economics, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.
- J. J. Hur, Chemical Process Economics in Practice, Reinhold, New York, 1956.
- R. C. Johnson, W. E. Ball et al., Mathematics, computers, operations research, and statistics, Indust. and Engr. Chem., vol. 52, 1960, pp. 359—367.
- R. C. Johnson, S. M. Roberts and C. A. Pfretzschner, Optimization and its Importance to Chemical Engineering, AIChE Ann. Meeting, San Francisco, California, December 7—9, 1959.
- M. S. Peters, Plant Design and Economics for Chemical Engineers, McGraw Hill Book Co., Inc., New York, 1958.
- S. M. Roberts, Stochastic Models for the Dynamic Programming Formulation of the Catalyst Replacement Problem, Optimization Techniques in Chem. Engr. Symp., New York University, May 18, 1960.
- C. E. Robinson and E. R. Gilliland, Elements of Fractional Distillation, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1950.
- H. E. Schwyler, Process Engineering Economics, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955.
- R. E. Treybal, Mass Transfer Operations, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955.
- L. A. Wanninger, The Application of Dynamic Programming to a Distillation Column, M. S. Thesis, Northwestern University, August, 1960.
- W. F. Gruter and B. H. Messikomer, Systematische Ausbeuteberechnung für isotherme Reaktoren im Falle zusammengesetzter Reaktionen, CIBA, Basel, Switzerland, 1960.
- W. F. Gruter and B. H. Messikomer, Optimalgesetze in der chemischen Reaktionstechnik, Helvetica Chimica Acta, vol. 44, pp. 285—298.
- W. F. Gruter and B. H. Messikomer, Dynamische Programmierung in der chemischen Technik, die Optimierung chemischer Reaktionsausbeuten, Helvetica Chimica Acta, vol. 43, pp. 2182—2186.
- W. F. Gruter and B. H. Messikomer, Optimalgesetze in der chemischen Reaktortechnik, Chimica, vol. 14, 1960, pp. 263—264.
- S. M. Roberts and J. D. Mahoney, Dynamic Programming Control of a Batch Reaction, 1961.
- S. M. Roberts, Dynamic Programming Formulation of the Catalyst Replacement Problem, 1961.
- A. Nomoto, Dynamic Programming Approach to Brachistochronic Program of Batch Process, Case Institute of Technology, 1959.
- A. Nomoto, Automatization of Dynamic Testing, Case Institute of Technology, 1959.

Изучение асимптотических свойств систем регулирования дано в работах:

D. S. Adorno, The Asymptotic Theory of Control Systems — I: Stochastic and Deterministic Processes, Jet Propulsion Lab., Technical Release 34—73, June 30, 1960.

M. Freimer, A Dynamic Programming Approach to Adaptive Control Processes, Lincoln Laboratory, No. 54-2, 1959.

M. Freimer, Topics in Dynamic Programming — II: Truncated Policies, Lincoln Laboratory, No. 54 G-0020, 1960.

Более глубокий анализ систем, основанных на пари, проводится в работе:

L. E. Dubins and L. J. Savage, How to Gamble if You Must (в печати).

Общее рассмотрение вопроса об использовании вычислительных машин дано в работе:

P. Armer, Attitudes Towards Intelligent Machines, The RAND Corporation, Paper P-2114, 1960.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Более подробное и строгое изложение методов, описанных в данной главе, имеется в книге:

Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.

О связи этих методов с другими подходами к задачам оптимизации автоматических систем см.

А. А. Фельдбаум, Оптимальные системы, Физматгиз, 1963.

ГЛАВА IX

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. ВВЕДЕНИЕ

Здесь мы хотим привести некоторые численные результаты для типичных систем регулирования с обратной связью. Сначала будет рассмотрена стохастическая задача регулирования, связанная с уравнением Ван-дер-Поля

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = f(t) + g(t), \quad (9.1)$$

где $f(t)$ — случайная возмущающая сила с известными характеристиками. Вторая задача относится к электронной лампе, подвергающейся случайным воздействиям с неизвестными характеристиками. Последнюю задачу мы будем исследовать как процесс с приспособлением. Результаты этой главы основываются на работе М. Аоки.

2. ДИСКРЕТНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

Вместо дифференциального уравнения (9.1) используем разностные уравнения

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta y_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta [-\mu(x_n^2 - 1)y_n - x_n] + f_n + g_n, \\ y_0 &= c_2, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Здесь x_n представляет положение системы в момент n , y_n — скорость, f_n — случайную силу, g_n — силовое слагаемое, определяемое действием регулятора.

Для простоты примем, что случайная сила является стационарной последовательностью случайных величин с распределением

$$f_n = \begin{cases} b & \text{с вероятностью } p, \\ -b & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases} \quad (9.3)$$

Напомним кратко основные сведения об однородном уравнении Ван-дер-Поля (здесь $\mu > 0$)

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0. \quad (9.4)$$

Начало координат в фазовой плоскости ($x=0$, $x'=0$) является неустойчивой точкой равновесия. Следовательно, случайное возмущение системы будет вызывать в ней периодические колебания, соответствующие единичному предельному циклу. Предположим, что нашей целью являются предупреждение этих колебаний и поддержание системы в положении равновесия. Стремясь к этой цели, мы будем выбирать управление g_n ($n=0, 1, \dots, N$) так, чтобы минимизировать математическое ожидание максимального отклонения системы от положения равновесия на интервале времени $0 \leq n \leq N$.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Определим, как обычно, функцию

$$f_N(x, y), \quad (9.5)$$

равную математическому ожиданию максимального отклонения точки в фазовой плоскости, изображающей регулируемую систему от начала координат в N -шаговом процессе регулирования, начинающемся из точки (x, y) при использовании оптимальной политики.

Измеряя отклонение от равновесия расстоянием $\sqrt{x^2 + y^2}$, мы получим, как и в предшествующей главе, соотношения

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ f_k(x, y) &= \max \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}; \min_g [pf_{k-1}(x_+, y_+) + \right. \\ &\quad \left. + (1-p)f_{k-1}(x_-, y_-)] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} x_+ &= x_- = x + y\Delta, \\ y_+ &= y + [-\mu(x^2 - 1)y - x]\Delta + b + g; \\ y_- &= y_+ - 2b. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Мы используем эти уравнения для вычисления последовательности $\{f_k(x, y)\}$.

4. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ

Последующие численные результаты были получены для диапазона изменения p от 0 до 1 и для

$$\mu = 1; \Delta = 0,05; -0,25 \leq x; y \leq 0,25; b = 0,0625. \quad (9.8)$$

Выбор управления g был ограничен следующими условиями:

$$\left. \begin{aligned} g &= \pm \frac{9}{128}, \text{ если } f_k(x, y) < 0,2; \\ g &= \pm \frac{1}{4}, \text{ если } f_k(x, y) \geq 0,2. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Анализ чувствительности $f_k(x, y)$ к изменению p упрощается в силу следующих соображений. Предполагая, без нарушения общности, что оптимальное управление таково, что $g(-x, -y) = -g(x, y)$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} (-x)_+ &= (-x)_- = (-x) + (-y)\Delta = -(x_+) = -(x_-), \\ (-y)_+ &= -y + [-\mu(x^2 - 1)(-y) - (-x)]\Delta + \\ &\quad + b + g = -(y_-), \\ (-y)_- &= -y + [-\mu(x^2 - 1)(-y) - (-x)]\Delta - \\ &\quad - b + g = -(y_+). \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Отсюда по индукции следует, что

$$f_k(x, y, p) = f_k(-x, -y, 1 - p). \quad (9.11)$$

Следовательно, если нам известна оптимальная политика при данном p для всех x на фазовой плоскости, то известна оптимальная политика и для $(1 - p)$. Это вдвое сокращает объем задачи по определению зависимости от p .

При ограничении области изменения x и y прямым углом $-\frac{1}{4} \leq x, y \leq \frac{1}{4}$ возникает задача установления подхо-

дящих условий для последовательности $\{f_k(x, y)\}$ на границе и за ней. Имеется несколько разных способов рассмотрения этой ситуации. Один из них заключается в том, что полагают:

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f_k\left(\frac{1}{4}, y\right), & x \geq \frac{1}{4}; -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}, \\ f_k\left(-\frac{1}{4}, y\right), & x \leq -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}, \\ f_k\left(x, \frac{1}{4}\right), & y \geq \frac{1}{4}; -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ f_k\left(x, -\frac{1}{4}\right), & y \leq -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (9.12)$$

Другой способ состоит в выборе управления таким, чтобы на систему всегда действовали силы, стремящиеся ввести ее в область фазовой плоскости $-\frac{1}{4} \leq (x, y) \leq \frac{1}{4}$, если система выйдет из этой области.

В дальнейших вычислениях мы будем следовать первому методу.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Впредь будем писать

$$f_k(x, y) \equiv f_k(x, y, p), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9.13)$$

что указывает на особую зависимость от p . Ясно, что f_k является неубывающей, когда k возрастает.

В окрестности начала координат разумно предположить, что

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq pf_k(x_+, y_+, p) + (1 - p)f_k(x_-, y_-, p). \quad (9.14)$$

Это окажется справедливым для последующих численных результатов. В самом деле, видно, что в узкой полосе, включающей ось x , этот результат верен.

Интересно нанести на плоскость (x, y) ряд значений, соответствующих равным величинам ожидаемого максимального отклонения, которые располагаются в фазовой плоскости на кривой, определяемой уравнением

$$f_n(x, y, p) = c, \quad (9.15)$$

для фиксированных k и p . Типичные кривые показаны на рис. 83 и 84.

Для достаточно больших $|y|$ выражение $\sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, превосходит $f_k(x, y, p)$. Это проявляется на рис. 83 и 84 в том, что для больших y часть кривых оказы-

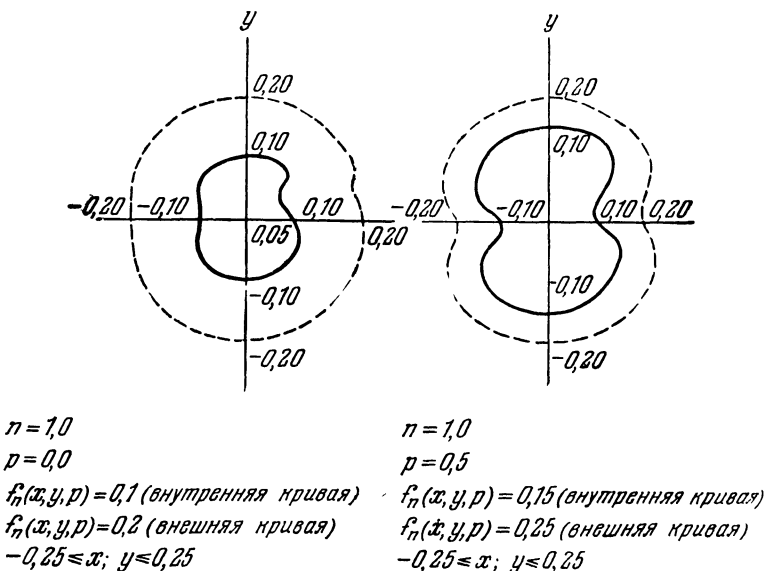


Рис. 83. Кривые $f_n(x, y, p) = \text{const}$.

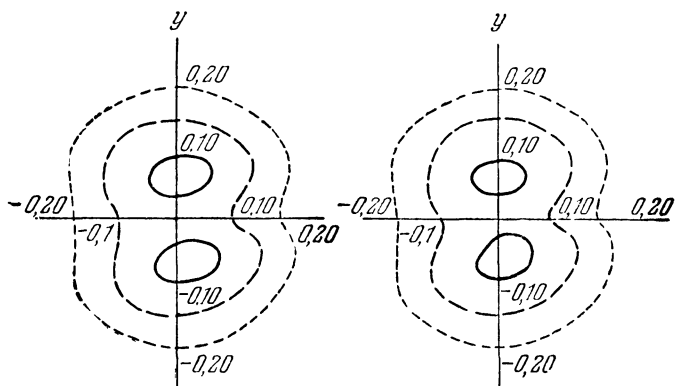
вается частями графиков $\sqrt{x^2 + y^2} = c$. Это можно также увидеть (рис. 85 и 86), проводя сечение функций $f_k(x, y, p)$ для постоянных k , p и x .

6. ЗАДАЧА О КОНЕЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

В качестве второй задачи, которую мы хотим исследовать численно, возьмем задачу о дискретном процессе регулирования, описываемом скалярным уравнением

$$x_{n+1} = ax_n + f_n + g_n, \quad x_0 = c, \quad (9.16)$$

где f_n — случайная вынуждающая сила, а g_n — управление. Мы интересуемся случаем, когда функция распределения для f_n известна не полностью.



$$n = 10$$

$$p = 0,25$$

$$f_n(x, y, p) = 0,1 \text{ (внутренняя кривая)}$$

$$f_n(x, y, p) = 0,15 \text{ (промежуточная кривая)}$$

$$f_n(x, y, p) = 0,20 \text{ (внешняя кривая)}$$

$$-0,25 \leq x, y \leq 0,25$$

$$n = 10$$

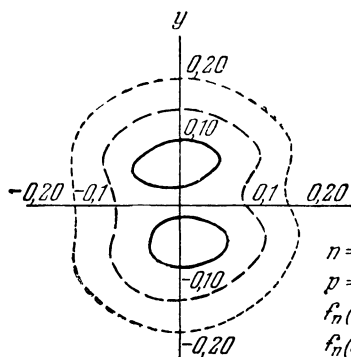
$$p = 0,375$$

$$f_n(x, y, p) = 0,1 \text{ (внутренняя кривая)}$$

$$f_n(x, y, p) = 0,15 \text{ (промежуточная кривая)}$$

$$f_n(x, y, p) = 0,20 \text{ (внешняя кривая)}$$

$$-0,25 \leq x; y \leq 0,25$$



$$n = 10$$

$$p = 0,125$$

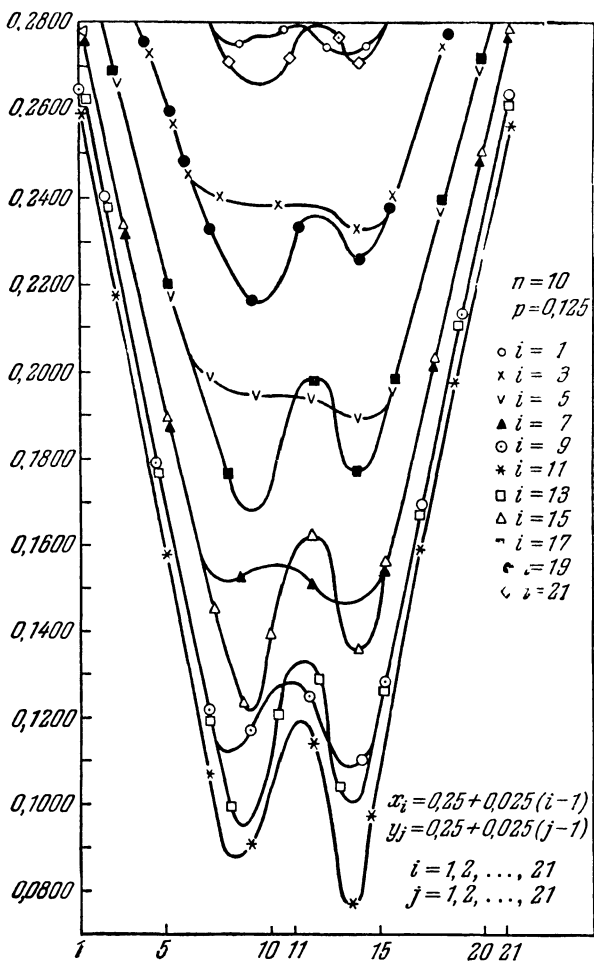
$$f_n(x, y, p) = 0,1 \text{ (внутренняя кривая)}$$

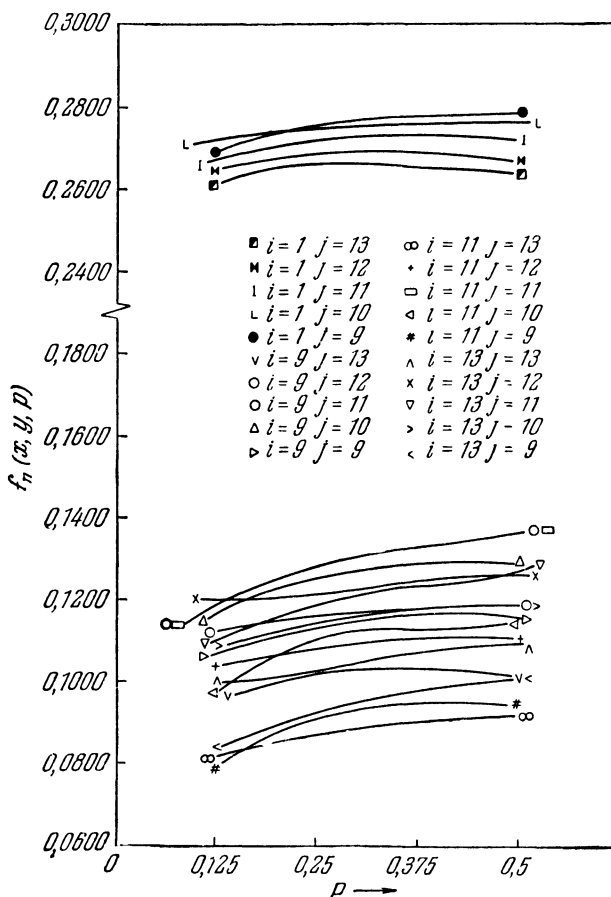
$$f_n(x, y, p) = 0,15 \text{ (промежуточная кривая)}$$

$$f_n(x, y, p) = 0,20 \text{ (внешняя кривая)}$$

$$-0,25 \leq x; y \leq 0,25$$

Рис. 84. Кривые $f_n(x, y, p) = \text{const.}$

Рис. 85. Зависимость $f_n(x, y, p)$ от y .

Рис. 86. Зависимость $f_n(x, y, p)$ от p .

Мы сделаем следующие предположения:

- (a) f_n принимает только два значения $\pm b$ с вероятностями p и $1-p$ соответственно, причем p неизвестно;
 (b) g_n может принимать только два значения $\pm m$, причем $m \geq b$;
 (c) целью процесса является минимизация математического ожидания x_N^2 .
- (9.17)

7. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ

Если p считать известным, то мы получим функциональное уравнение

$$\left. \begin{aligned} h_k(x) &= \min_{g=\pm m} [ph_{k-1}(x_+) + (1-p)h_{k-1}(x_-)]; \quad k \geq 2, \\ h_1(x) &= \min_{g=\pm m} [px_+^2 + (1-p)x_-^2] \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

для функции $h_N(x) = \min E \{x_N^2\}$. Здесь

$$\begin{aligned} x_+ &= ax + b + g, \\ x_- &= ax - b + g. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Это уравнение можно использовать для получения многих сведений об аналитической природе оптимальной политики. Важно рассмотреть эту последовательность функций $\{h_n(x)\}$, так как интуитивно ясно, что при увеличении числа испытаний поведение процесса с адаптацией будет все более и более приближаться к поведению стохастического процесса, в котором вероятность p была оценена на основе наблюдаемой ранее частоты появления $+b$ и $-b$.

8. ПРОЦЕСС С АДАПТАЦИЕЙ

Рассмотрим теперь простой процесс с адаптацией в ситуации, когда неизвестная вероятность p равна либо p_1 , либо p_2 ($p_1 > p_2$) с априорной вероятностью

$$\text{Pr}(p = p_1) = z. \quad (9.20)$$

Предположим, что если наблюдалось $f = +b$, то апостериорная вероятность будет равной

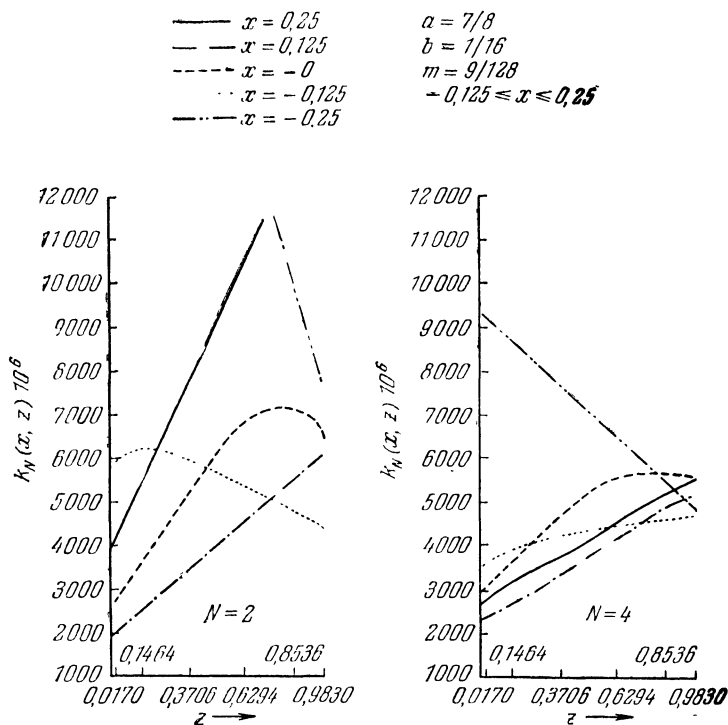
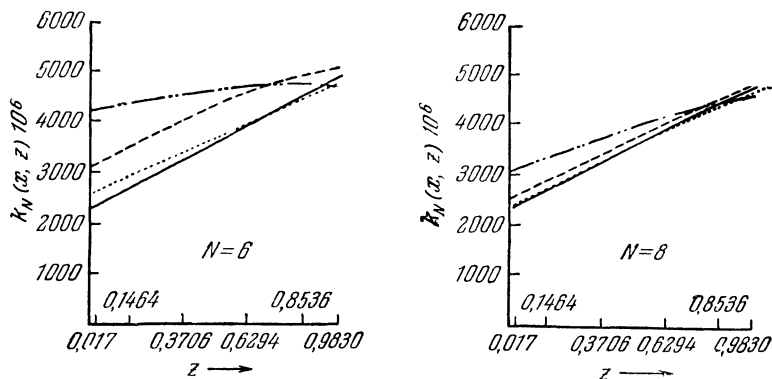
$$z_+ = \frac{zp_1}{zp_1 + (1-z)p_2}, \quad (9.21)$$

а если $f = -b$, то апостериорная вероятность принимается равной

$$z_1 = \frac{z(1-p_1)}{z(1-p_1) + (1-z)(1-p_2)}. \quad (9.22)$$

Ввода функции

$$h_N(x, z) = \min E \{x_N^2\}, \quad (9.23)$$

Рис. 87. Зависимость $k_n(x, z)$ от априорной вероятности z .Рис. 88. Зависимость $k_n(x, z)$ от априорной вероятности z .

мы получим функциональные уравнения

$$\left. \begin{aligned} k_1(x, z) &= \min_{g_1} \{ [zp_1 + (1-z)p_2] x_+^2 + \\ &\quad + [z(1-p_1) + (1-z)(1-p_2)] x_-^2 \}, \\ k_N(x, z) &= \min_{\varepsilon_N} \{ [zp_1 + (1-z)p_2] k_{N-1}(x_+, z_+) + \\ &\quad + [z(1-p_1) + (1-z)(1-p_2)] k_{N-1}(x_-, z_-) \}. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Графики на рис. 87 и 88 показывают зависимость $k_n(x, z)$ от z при различных N и x . Использовались следующие значения параметров: $a = 7/8$, $b = 1/16$, $m = 9/128$, а область изменения x ограничивалась интервалом $\left(-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}\right)$.

Для сохранения интервала по x фиксированным от шага к шагу использовался тот же метод, что и выше.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

Материал, содержащийся в этой главе, взят из диссертации Масанао Аоки (Masanao Aoki, Ph. D. Thesis Department of Engineering, University of California, Los Angeles, 1960).

ГЛАВА X

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ КРИТЕРИИ

1. ВВЕДЕНИЕ

В предшествующих главах внимание было сосредоточено в основном на получении достаточно целенаправленных вычислительных алгоритмов. Нашей целью была выработка методов, которые приводили бы к численным решениям независимо от конкретных структурных свойств индивидуальных задач. Однако, как постоянно подчеркивалось ранее, в большинстве случаев трудности, связанные с размерностью, ограничивают возможность прямых подходов. Следовательно, здесь требуется определенная изобретательность. Для получения подходящего аппарата или более быстрых и более эффективных методов мы должны сочетать специфические аналитические свойства рассматриваемого процесса и подход с помощью функционального уравнения.

Как мы видели, во многих случаях, когда описывающие процесс уравнения линейны и критерии квадратичны, можно получить вычислительные процедуры, которые гораздо лучше процедур, даваемых обычными классическими методами. Это имеет место, несмотря на тот факт, что классические вариационные уравнения линейны, в то время как уравнения, получаемые при использовании метода динамического программирования, нелинейны.

Эти результаты, конечно, важны сами по себе. К тому же они служат в качестве важных этапов в цепи последовательных приближений к решению более сложных задач. Наконец, такие же методы применимы к стохастическим и

адаптивным процессам управления, где обычные методы оказываются вообще бесполезными.

В основном в этой главе мы будем просто перечислять результаты, отсылая читателя для более подробных сведений к первоисточникам.

2. ЗАДАЧА СГЛАЖИВАНИЯ

Для того чтобы проиллюстрировать в элементарных терминах аналитический аппарат, который будет неоднократно использоваться в различных контекстах, вернемся к процессу «сглаживания», рассмотренному в главе III.

Предположим, что мы хотим определить значения x_i , обращающие в минимум функцию

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_N) = a_1(x_1 - c)^2 + a_2(x_2 - x_1)^2 + \dots + a_N(x_N - x_{N-1})^2 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \dots + b_Nx_N^2. \quad (10.1)$$

Действуя обычным образом, полагаем:

$$f_k(c) = \min_x [a_k(x_k - c)^2 + \dots + a_N(x_N - x_{N-1})^2 + b_kx_k^2 + \dots + b_Nx_N^2] \quad (10.2)$$

для $k = 1, 2, \dots, N-1$. Тогда, как ранее,

$$f_N(c) = \min_{x_N} [a_N(x_N - c)^2 + b_Nx_N^2], \quad (10.3)$$

и для $k = 1, 2, \dots, N-1$ мы имеем рекуррентное соотношение

$$f_k(c) = \min_{x_k} [a_k(x_k - c)^2 + b_kx_k^2 + f_{k+1}(x_k)]. \quad (10.4)$$

Таким образом, пока мы не добавили ничего нового к нашим предшествующим рассуждениям. Используем теперь то важное обстоятельство, что каждая из функций $f_1(c)$, $f_2(c)$, \dots , $f_N(c)$ является квадратичной функцией от c . Именно

$$f_k(c) = u_k c^2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10.5)$$

где u_k не зависит от c . По-видимому, проще всего это показать методом индукции. Результат, очевидно, верен для $k = N$, а соотношение (10.4) показывает, что эта структура сохраняется.

После того, как установлена формула (10.5), нетрудно получить рекуррентное соотношение, связывающее u_k и u_{k+1} . Подставляя (10.5) в (10.4), получим уравнение

$$u_k c^2 = \min_{x_k} [a_k (x_k - c)^2 + b_k x_k^2 + u_{k+1} x_k^2]. \quad (10.6)$$

Легко видеть, что значение x_k , доставляющее минимум, равно

$$x_k = \frac{a_k c}{(a_k + b_k + u_{k+1})}. \quad (10.7)$$

Подставляя это значение в (10.6), получим **простое** рекуррентное соотношение

$$u_k = \frac{a_k b_k + a_k u_{k+1}}{a_k + b_k + u_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad (10.8)$$

при этом

$$u_N = \frac{a_N b_N}{a_N + b_N}. \quad (10.9)$$

Определив таким образом последовательность $\{u_k\}$, мы получим из (10.7) минимизирующие значения x_k .

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Обычные методы классического анализа, примененные к задаче минимизации, рассмотренной в предшествующем параграфе, приводят к системе линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1(x_1 - c) - a_2(x_2 - x_1) + b_1 x_1 &= 0, \\ \vdots \\ a_k(x_k - x_{k-1}) - a_{k+1}(x_{k+1} - x_k) + b_k x_k &= 0, \\ \vdots \\ a_N(x_N - x_{N-1}) + b_N x_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Хотя обычно время, требуемое для решения системы N линейных уравнений пропорционально N^3 , особый вид матриц, связанных с записанной выше линейной системой, позволяет

применить специальные методы, сокращающие это время. Оно становится пропорциональным N .

В этом случае, если требуется только найти численное решение, использование метода функциональных уравнений не дает никаких особых преимуществ.

4. БОЛЕЕ СЛОЖНАЯ ЗАДАЧА СГЛАЖИВАНИЯ

Предположим, что мы хотим минимизировать функцию

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_N) = a_1(x_1 - c_1)^2 + a_2(x_2 - 2x_1 + c_2)^2 + \\ + a_3(x_3 - 2x_2 + x_1)^2 + \dots + b_1 x_1^2 + \\ + b_2 x_2^2 + \dots + b_N x_N^2. \quad (10.11)$$

Вводя последовательность функций

$$f_k(c_1, c_2) = \min_x [a_k(x_k - c_1)^2 + a_{k+1}(x_{k+1} - 2x_k + c_2)^2 + \dots \\ \dots + b_k x_k^2 + b_{k+1} x_{k+1}^2 + \dots + b_N x_N^2], \quad (10.12)$$

мы получим рекуррентное соотношение

$$f_k(c_1, c_2) = \min_{x_k} [a_k(x_k - c_1)^2 + b_k x_k^2 + \\ + f_{k+1}(2x_k - c_2, x_k)], \quad (10.13)$$

$k = 1, 2, \dots, N-2$, причем

$$f_{N-1}(c_1, c_2) = \min_{x_{N-1}, x_N} [a_{N-1}(x_{N-1} - c_1)^2 + \\ + a_N(x_N - 2x_{N-1} + c_2)^2 + b_{N-1} x_{N-1}^2 + b_N x_N^2]. \quad (10.14)$$

Теперь методом индукции легко показать, что

$$f_k(c_1, c_2) = u_k c_1^2 + 2v_k c_1 c_2 + w_k c_2^2, \\ k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10.15)$$

После получения этого результата нетрудно вывести, как и выше, рекуррентное соотношение, связывающее тройку

$$[u_k, v_k, w_k] \text{ с } [u_{k+1}, v_{k+1}, w_{k+1}].$$

Введем последовательность функций $\{f_N(z)\}$, $-\infty < z < \infty$, $N=1, 2, \dots$, определяемых соотношением

$$f_N(z) = \min_{x_i} \left[\sum_{i=1}^N \left(x^i, A_i x^i \right) - 2 \sum_{i=1}^N \left(c^i, x^i \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{N-1} b_i x_{1+3i} x_{3i} + 2zx_{3N} \right]. \quad (10.20)$$

Тогда мы получим рекуррентное соотношение

$$f_N(z) = \min_{R_N} [(x^N, A_N x^N) + 2zx_{3N} - 2(c^N, x^N) + \\ + f_{N-1}(b_{N-1} x_{3N-2})], \quad (10.21)$$

где R_N — трехмерная область $-\infty < x_{3N}, x_{3N-1}, x_{3N-2} < \infty$.

Легко установить индукцией, что каждая функция $f_N(z)$ является квадратичной функцией от z :

$$f_N(z) = u_N + 2v_N z + w_N z^2. \quad (10.22)$$

Используя (10.21), нетрудно вывести рекуррентные соотношения для u_k , v_k и w_k , аналогичные полученным выше. Использование этого метода при рассмотрении общего случая, когда матрицы A_i имеют различные размеры, не вызывает затруднений.

6. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Задачу нахождения нетривиальных решений уравнения

$$u'' + \lambda \varphi(t) u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (10.23)$$

можно рассматривать, при разумных предположениях относительно $\varphi(t)$, как задачу определения относительных минимумов функционала

$$I(u) = \int_0^1 u'^2 dt \quad (10.24)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \int_0^1 \varphi(t) u^2 dt = 1, \\ (b) \quad & u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Рассмотрим только задачу определения абсолютного минимума, наименьшего характеристического числа упомянутой выше задачи Штурма — Лиувилля.

Дискретным аналогом поставленной выше вариационной задачи является задача минимизации квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_N) = (x_1 - c)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x_N - x_{N-1})^2 + x_N^2 \quad (10.26)$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i x_i^2 = 1. \quad (10.27)$$

Предположим, что $0 < a \leq \varphi_i \leq b < \infty$ при всех i , и введем последовательность функций $\{f_k(c)\}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, определяемых соотношением

$$f_k(c) = \min_x [(x_k - c)^2 + (x_{k+1} - x_k)^2 + \dots + (x_N - x_{N-1})^2 + x_N^2], \quad (10.28)$$

где x_k подчинены условию

$$\sum_{i=k}^N \varphi_i x_i^2 = 1. \quad (10.29)$$

Легко видеть, что

$$f_{N-1}(c) = \min_{x_{N-1}, x_N} [(x_{N-1} - c)^2 + x_N^2], \quad (10.30)$$

где

$$\varphi_{N-1} x_{N-1}^2 + \varphi_N x_N^2 = 1, \quad (10.31)$$

и

$$f_k(c) = \min_{x_k} \left[(x_k - c)^2 + (1 - \varphi_k x_k^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times f_{k+1} \left(\frac{x_k}{(1 - \varphi_k x_k^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right], \quad (10.32)$$

где $\varphi_k x_k^2 \leq 1$.

Значение $f_1(0)$ есть приближение к наименьшему характеристическому числу уравнения Штурма—Лиувилля.

7. СТОХАСТИЧЕСКОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

Рассмотрим теперь вкратце стохастический вариант задачи сглаживания, о которой речь шла в § 2. Предположим, что мы хотим минимизировать математическое ожидание функции

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^N (a_i y_i^2 + b_i x_i^2), \quad (10.33)$$

где

$$x_{i+1} = d_i x_i + y_i + r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (10.34)$$

Здесь r_i — независимые случайные величины с заданными распределениями.

Положив для $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$f_k(c) = \min E \left[\sum_{i=k}^N (a_i y_i^2 + b_i x_i^2) \right], \quad (10.35)$$

где $x_{k-1} = c$, имеем:

$$f_k(c) = \min_{y_k} \left[a_k y_k^2 + b_k c^2 + \int f_{k+1}(d_k c + y_k + r_k) dG_k(r_k) \right] \quad (10.36)$$

для $k = 1, 2, \dots, N-1$ и

$$f_N(c) = b_N c^2. \quad (10.37)$$

Легко показать с помощью индукции, что каждая функция $f_k(c)$ — квадратичная функция от c ,

$$f_k(c) = u_k + 2v_k c + w_k c^2, \quad (10.38)$$

а затем получить рекуррентные соотношения, аналогичные полученным в § 2.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
С КВАДРАТИЧНЫМИ КРИТЕРИЯМИ —
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим задачу определения вектора управлений $v(t)$, минимизирующего квадратичный функционал

$$I(v) = \lambda \int_0^T v^2 dt + u(T)^2, \quad (10.39)$$

где u и v связаны соотношением

$$\frac{du}{dt} = au + v, \quad u(0) = c. \quad (10.40)$$

Рассмотрим дискретный случай. Мы хотим минимизировать квадратичную форму

$$Q_N(v) = u_N^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} v_i^2 \quad (10.41)$$

по всем v_k , когда u_k и v_k связаны соотношением

$$u_{k+1} = au_k + v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad u_0 = c. \quad (10.42)$$

Полагая

$$f_N(c) = \min_v Q_N(v), \quad (10.43)$$

имеем

$$f_1(c) = \min_{v_0} [(ac + v_0)^2 + \lambda v_0^2], \quad (10.44)$$

и для $N = 2, 3, \dots$

$$f_N(c) = \min_{v_0} [\lambda v_0^2 + f_{N-1}(ac + v_0)]. \quad (10.45)$$

Используя тот факт, что каждая функция в последовательности $\{f_k(c)\}$ является квадратичной функцией от c , $f_k(c) = u_k + 2v_k c + w_k c^2$, можно быстро получить рекуррентные соотношения для u_k , v_k и w_k .

9. СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Аналогично для величин u_k , v_k , связанных соотношением

$$u_{k+1} = au_k + v_k + r_k, \quad u_0 = c, \quad (10.46)$$

где $\{r_k\}$ — последовательность случайных величин с заданными распределениями, рассмотрим задачу минимизации математического ожидания квадратичной формы

$$Q_N(v) = u_N^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} v_i^2. \quad (10.47)$$

Обозначив

$$f_N(c) = \min E[Q_N(v)], \quad (10.48)$$

где минимизация производится по всем политикам управления с обратной связью, получим, как и выше,

$$f_N(c) = \min_{v_0} \left[\lambda v_0^2 + \int f_{N-1}(ac + v_0 + r_0) dG(r_0) \right], \quad (10.49)$$

где $G(r)$ — функция распределения для r_0 .

Нетрудно убедиться, используя метод индукции, что каждый элемент последовательности $\{f_k(c)\}$ является квадратичной функцией от c ,

$$f_k(c) = u_k + 2v_k c + w_k c^2, \quad (10.50)$$

и снова получить рекуррентные соотношения для коэффициентов.

Аналогичные результаты можно получить для адаптивного случая. Ссылки помещены в конце главы.

10. ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ

В предыдущей главе мы указывали, что задачу минимизации функции $g(x_1(T), x_2(T), \dots, x_k(T))$ по всем функциям $y(t)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y, \quad x(0) = c, \quad (10.51)$$

можно рассматривать в терминах функций от k переменных, независимо от размерности x . Покажем теперь, что задача существенно упрощается, если g — квадратичная функция своих аргументов.

Решение уравнения (10.51) имеет вид

$$x = e^{At} c + \int_0^t e^{A(t-s)} y(s) ds. \quad (10.52)$$

Следовательно, задача сводится к минимизации

$$g\left(c'_1 + \int_0^T \left[\sum_{j=1}^N p_{1j}(s) y_j(s) \right] ds, \dots, c'_k + \int_0^T \left[\sum_{j=1}^N p_{kj}(s) y_j(s) \right] ds\right), \quad (10.53)$$

где постоянные c'_i и функции $p_{ij}(s)$ известны.

Введя новые функции

$$f(c'_1, c'_2, \dots, c'_k, T) = \min_{\{y\}} g, \quad (10.54)$$

легко увидеть, что f — квадратичная функция от c'_i . Если допустить, что T непрерывно, то функциональное уравнение (8.54) приводит к системе дифференциальных уравнений для коэффициентов $g_{ij}(T)$ в выражении

$$f = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(T) c'_i c'_j. \quad (10.55)$$

В случае дискретного T получится система **нелинейных** рекуррентных соотношений.

11. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ

Линейная теория предсказания Колмогорова и Винера приводит к задаче минимизации квадратичной формы

$$D_{N, M} = \sum_{k=0}^N (b_k - \sum_{l=0}^M u_l a_{k-l}^2) \quad (10.56)$$

по всем вещественным значениям u_k , где a_k и b_k — заданные вещественные числа. Предположим, что $a_{-r} = 0$, $r \geq 1$ и что $N > M$. Поскольку прямой подход приводит к решению системы линейных уравнений, мы хотим предложить метод, основанный на аппарате функциональных уравнений, позволяющий обойтись без этого.

Итак, рассмотрим задачу минимизации квадратичной формы

$$E_r \left\{ \sum_{k=0}^N (b_k + r_k - \sum_{l=0}^M u_l a_{k-l})^2 \right\}, \quad (10.57)$$

где r_k — сначала независимые случайные величины, потом коррелированные случайные величины такие, что распределение r_k зависит только от r_{k-1} , а затем случайные величины с неизвестными распределениями, подлежащими определению из наблюдений.

12. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Минимум величины $D_{N,M}$ по всем u_k есть квадратичная форма относительно b_k ,

$$\min_u D_{N,M} = (b, Q_{N,M} b), \quad (10.58)$$

где $Q_{N,M}$ — симметричная неотрицательно определенная матрица порядка $(N+1) \times (N+1)$, заданная для $N > M \geq 0$, а b — $(N+1)$ -мерный вектор-столбец с компонентами b_0, b_1, \dots, b_N . Запишем (10.58) в виде

$$\min_u D_{N,M} = \min_{[u_0, u_1, \dots, u_N]} [(b_0 - u_0 a_0)^2 + (b_1 - u_0 a_1 - u_1 a_0)^2 + \dots + (b_N - u_0 a_N - u_1 a_{N-1} - \dots - u_M a_0)^2]. \quad (10.59)$$

Если u_0 выбрано, мы видим, что получается аналогичная задача определения u_1, u_2, \dots, u_M , где

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(a)} & b_i \text{ заменено на } b_i - u_0 a_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{(b)} & M \text{ заменено на } M - 1, \\ \text{(c)} & N + 1 \text{ заменено на } N. \end{array} \right\} \quad (10.60)$$

Следовательно, в терминах функции, определяемой равенством (10.58), имеем:

$$\begin{aligned} (b, Q_{N,M} b) &= \\ &= \min_{u_0} [(b_0 - u_0 a_0)^2 + (b' - u_0 a', Q_{N-1, M-1} (b' - u_0 a'))], \end{aligned} \quad (10.61)$$

где b' и a' — теперь N -мерные векторы с компонентами соответственно a_1, a_2, \dots, a_N и b_1, b_2, \dots, b_N . Положим

$$P_{N,M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{N-1, M-1} \end{pmatrix}. \quad (10.62)$$

Тогда (10.61) принимает вид

$$(b, Q_{N,M} b) = \min_{u_0} (b - u_0 a, P_{N,M} (b - u_0 a)), \quad (10.63)$$

и легко видеть, что

$$(b, Q_{N,M} b) = \frac{(b, P_{N,M} a)(a, P_{N,M} a) - (a, P_{N,M} b)^2}{(a, P_{N,M} a)} \quad (10.64)$$

при минимизирующем выборе u_0 , задаваемом равенством

$$u_0 = \frac{(a, P_{N,M} b)}{(a, P_{N,M} a)}. \quad (10.65)$$

Таким образом, мы получаем рекуррентное соотношение, связывающее $Q_{N,M}$ с $Q_{N-1,M-1}$. Итерируя это соотношение M раз, приходим к задаче минимизации формы

$$\sum_{k=0}^{N-M} (b_k - u_0 a_k)^2 \quad (10.66)$$

по u_0 , имеющей весьма простое решение. Исходя из этого решения, с помощью рекуррентного соотношения (10.63) получаем решение исходной задачи.

13. СТОХАСТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим теперь задачу определения минимума (10.57), когда r_k — независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $G(r)$. Тогда, обозначив

$$(b, Q_{N,M} b) + 2(b, q_{N,M}) + p_{N,M} = \min_u E \{ \dots \}, \quad (10.67)$$

мы получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} (b, Q_{N,M} b) + 2(b, q_{N,M}) + p_{N,M} = \\ = \min_{u_0} \left[\int \{ (b_0 - u_0 a_0 + r_0)^2 dG(r_0) + (b - u_0 a, Q_{N-1,M-1} \times \right. \\ \left. \times (b - u_0 a)) + 2(b - u_0 a, q_{N-1,M-1}) + p_{N-1,M-1} \} \right]. \quad (10.68) \end{aligned}$$

Из этого соотношения можно легко получить рекуррентные соотношения, как это сделано выше.

14. КОРРЕЛЯЦИЯ

Положим теперь $r_{-1} = z$ и запишем:

$$(b, Q_{N,M}(z) b) = \min_u \left[E \left\{ \sum_{k=0}^N (b_k + r_k - \sum_{l=0}^M u_l a_{k-l})^2 \right\} \right]. \quad (10.69)$$

Тогда аналогом (10.68) будет:

$$\begin{aligned}
 (b, Q_{N,M}(z) b) + 2(b, q_{N,M}(z)) + p_{N,M}(z) = \\
 = \min_{u_0} \left[\int \{ (b_0 - u_0 a_0 + r_0)^2 + \right. \\
 \left. + (b - u_0 a, Q_{N-1,M-1}(r_0)(b - u_0 a)) + \right. \\
 \left. + 2(b - u_0 a, q_{N-1,M-1}(r_0)) + p_{N-1,M-1}(r_0) \} dG(r_0, z) \right], \quad (10.70)
 \end{aligned}$$

откуда снова можно получить рекуррентные соотношения.

15. ТЕОРИЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ С АДАПТАЦИЕЙ

Рассмотрим теперь случай, когда процесс протекает следующим образом. Сначала выбирается u_0 , затем наблюдается $b_0 + r_0$. Далее выбирается u_1 и наблюдается $b_1 + r_1$ и т. д. Предположим, что последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ известны. На основе наблюдений над r_0, r_1, \dots мы выводим распределение r_k . Это есть адаптивный процесс, описанный в § 29 главы VIII.

Чтобы проиллюстрировать аппарат, которым мы будем пользоваться при решении задач такого рода, рассмотрим простой случай, когда предполагается, что каждое r_k принимает только значения ± 1 соответственно с вероятностями p и $(1 - p)$, причем p неизвестно. Пусть $G(p)$ — заданное априорное распределение p . Предполагаем, что после наблюдения m значений $+1$ и n значений -1 мы принимаем в качестве нового априорного распределения

$$dG_{mn} = \frac{p^m (1 - p)^n dG(p)}{\int_0^1 p^m (1 - p)^n dG(p)}. \quad (10.71)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 f(N, M; m, n; b) = (b, Q_{N,M}(m, n) b) + 2(b, q_{N,M}(m, n)) + \\
 + p_{NM}(m, n) = \min_u \left[E \left\{ \sum_{k=0}^N \left(b_k + r_k - \sum_{l=0}^M u_l a_{k-l} \right)^2 \right\} \right], \quad (10.72)
 \end{aligned}$$

предполагая, что мы уже наблюдали m раз $\div 1$ и n раз -1 . Тогда рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} f(N, M; m, n; b) = \\ = \min_{u_0} [p_{mn} f(N-1, M-1; m \div 1, n; b - u_0 a) + \\ + (1 - p_{mn}) f(N-1, M-1; m, n \div 1; b - u_0 a)] \quad (10.73) \end{aligned}$$

позволяет нам получить рекуррентные соотношения, как и выше, для матриц $Q_{N,M}$, векторов $q_{N,M}$ и скаляров p_{NM} . Вероятность p_{mn} вычисляется по формуле

$$p_{mn} = \int_0^1 p dG_{mn}. \quad (10.74)$$

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 1. Ряд результатов этой главы вместе с другими результатами аналогичного характера и дополнительными ссылками можно найти в книге:

R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, Chapter 9.

Кроме того, они включены в упражнения книги «Динамическое программирование».

§ 5. Аналогичный аппарат можно применять при изучении задач линейного программирования, в которых матрица коэффициентов имеет почти блочно-диагональную форму. См. статью:

R. Bellman, On the computational solution of linear programming problems involving almost block diagonal matrices, Management Science, vol. 3, 1957, pp. 403—406.

§ 9. Подробное рассмотрение задач такого рода можно найти в книге:

R. Beckwith, Analytic and Computational Aspects of Dynamic Programming Processes of High Dimension, Jet Propulsion Laboratory, 1959.

§ 10. Дальнейшие результаты имеются в статье:

R. Bellman and R. Kalaba, Reduction of dimensionality, dynamic programming and control processes, J. Basic. Engr., vol. 83, 1961, pp. 82—84.

§ 11. Вопросы обоснования задачи и подхода к ней другими методами освещены в работе:

N. Levinson, Appendix to N. Wiener, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, Technology Press and John Wiley and Sons, New York, 1949.

Описанный здесь аппарат заимствован из статей:

R. Bellman, Dynamic Programming and Mean Square Deviation, The RAND Corporation, Paper P-1147, September 13, 1957.

R. Bellman, Dynamic Programming and Linear Prediction Theory, The RAND Corporation, Paper P-2308, May 16, 1961.

Систематическое развитие этих идей и дальнейшие результаты даны в работе:

R. E. Kalman, New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory, RIAS, Technical Report 61-1, 1960.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. А. Ф е л ь д б а у м, О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства, Автоматика и телемеханика, т. 16, № 2, 1955.

Р. В. Г а м к р е л и д з е, Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Изв. АН СССР, серия матем., 22, № 4, 1958.

ГЛАВА XI

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ РЕШЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показано на предыдущих страницах, процессы динамического программирования могут принимать различные формы. Мы изучали процессы, в которых переменные, описывающие политику, могут принимать дискретное множество значений, и процессы, где они могут принимать континуум значений. Иногда область допустимых решений ограничивалась дополнительными условиями. Параметры состояния, описывающие систему, были как дискретными, так и непрерывными, а сами процессы — как детерминированными, стохастическими, так и адаптивными.

В первых девяти главах дан единый вычислительный алгоритм, одинаково применимый к линейным и нелинейным критериям, к детерминированным и стохастическим процессам. Будучи общим методом, он не нуждается в перекройке для применения к конкретному процессу. В главе X показано, как можно, воспользовавшись конкретной аналитической структурой задачи, дать вычислительные алгоритмы более простые, чем даваемые классическими методами или прямым методом динамического программирования.

На последующих страницах мы намерены описать несколько дополнительных способов, позволяющих воспользоваться индивидуальной аналитической структурой задачи оптимизации для существенного упрощения ее численного решения. Во многих случаях задачи оптимизации разрешимы во

всей общности только при использовании этих более тонких и искусных методов.

Сначала мы хотим рассмотреть некоторые задачи, занимающие привилегированное место в динамическом программировании, а по существу и в математическом анализе. Сюда относятся задачи, которые обладают некоторыми чертами *линейности*.

В искусстве построения математических моделей одной из наиболее трудных является задача уравнивания реалистического описания и мощности существующего аналитического и вычислительного аппарата. Довольно часто упрощенные до бессмысленности задачи решаются тщательным образом, в то время как чрезмерно сложные процессы остаются без внимания, причиной чего являются математические трудности.

Несмотря на некоторую опасность построения линейных моделей для задач реального мира, трудно отказаться от эстетического наслаждения, которое дает получение точных решений. Примирение этих двух сторон — один из камней преткновения при построении моделей.

Численные результаты этой главы основаны главным образом на работе Р. Ховарда. Многие дальнейшие результаты можно найти в его книге, упомянутой в конце главы.

2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Прежде чем говорить о марковских процессах решения — частном случае секвенциальных процессов решения, которые мы хотим рассмотреть в этой главе, — необходимо пояснить, что такое *процесс Маркова*.

Рассмотрим систему, которая в любой фиксированный момент времени может находиться в одном из конечного числа состояний, которые мы перенумеруем числами $i = 1, 2, \dots, N$, и предположим, что в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots$ система переходит из одного из этих состояний в другое. Далее, пусть процесс перехода происходит не детерминированно, а стохастически и управляется переходной матрицей $P = (p_{ij})$, где

p_{ij} — вероятность того, что система в момент $t + 1$ находится в состоянии j , если известно, что в момент t она была в состоянии i . (11.1)

Мы рассмотрим здесь важный случай, когда переходная матрица P не зависит от времени. Это — наиболее интересный случай.

Введем следующие функции:

$$x_t(i) — \text{вероятность того, что система в момент } t \text{ находится в состоянии } i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11.2)$$

где предполагается, что t принимает только значения $0, 1, \dots$. Тогда элементарные правила теории вероятностей приводят к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1}(j) &= \sum_{i=1}^N p_{ij} x_t(i), & j &= 1, 2, \dots, N, \\ x_0(i) &= c_i. \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

Теория марковских процессов посвящена изучению асимптотического поведения функций $x_t(i)$ при $t \rightarrow \infty$. Если все переходные вероятности p_{ij} положительны, то не составляет большого труда доказать, что эти функции сходятся при $t \rightarrow \infty$ к величинам $x(i)$, удовлетворяющим уравнению «стационарного режима»

$$x(j) = \sum_{i=1}^N p_{ij} x(i), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (11.4)$$

Сходимость этих функций при $t \rightarrow \infty$, по-видимому, не является слишком неожиданной, если принять во внимание свойство перемешивания, содержащееся в условии, что все p_{ij} положительны. Неожиданным же в этом случае является тот факт, что предельные значения не зависят от первоначального состояния системы, т.е. от значений $x_0(i)$.

Именно эта математическая идея объясняет необходимость тщательного тасования карт. Действительно, чаще всего тасование делается довольно небрежно, и при игре в бридж большую информацию о картах противника можно получить, помня взятки при предыдущей сдаче.

3. МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ

Теперь мы хотим перенести понятие марковского процесса на более общие ситуации, в которых решения принимаются на каждом шаге. Предположим, что на каждом шаге в качестве переходной матрицы может быть выбрана одна из

множества таких матриц, и обозначим матрицу, соответствующую политике q , через $P(q) = (p_{ij}(q))$.

Предположим далее, что меняется не только состояние на каждом шаге, но также и доход, который является функцией начального и конечного состояний и решения.

Пусть $R(q) = (r_{ij}(q))$ означает соответствующую матрицу доходов.

Процесс такого типа называется *марковским процессом решения*. Мы хотим рассмотреть здесь задачу о выборе последовательности решений, максимизирующих математическое ожидание дохода, получаемого в N -шаговом процессе, при заданном начальном состоянии системы.

4. ПРИМЕР — ЗАДАЧА О ТАКСИ

Прежде чем перейти к аналитическому рассмотрению задач такого рода, посмотрим, как весьма естественным образом они возникают. В качестве иллюстрации дадим упрощенный вариант операции пробега такси.

Удобство примера такого рода состоит в том, что он позволяет нам придать конкретный смысл таким понятиям, как «переходная матрица», «альтернативные решения» и т. д.

Предположим, что водитель такси обслуживает окрестности трех городов. Если он находится в городе 1, то перед ним стоят три альтернативы.

(1) Он может курсировать в надежде, что его остановит пассажир.

(2) Он может подъехать к ближайшей стоянке такси и ожидать в очереди.

(3) Он может включиться в радиосеть и ожидать вызова по радио.

В городе 3 он имеет такие же альтернативы, а в городе 2 последняя альтернатива отсутствует, так как в этом городе нет обслуживания пассажиров с помощью радио.

Для каждой фиксированной альтернативы в каждом городе задаются вероятности того, что следующая поездка произойдет в любой из городов 1, 2 и 3, и соответствующие известные доходы в денежных единицах, связанные с каждой поездкой. Поскольку каждой альтернативе соответствуют разные совокупности клиентов, вероятности перехода и доходы зависят от альтернатив.

Если им приписать некоторые гипотетические числа, то данные задачи можно записать в виде таблицы 11.1.

Таблица 11.1

Состояние (город)	Альтернатива	Переходная вероятность			Доход		
		$j = 1$	2	3	$i = 1$	2	3
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10	4	8
	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	8	2	4
	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	4	6	4
2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	14	0	18
	2	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	8	16	8
3	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	10	2	8
	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	6	4	2
	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	4	0	8

Поясним таблицу на примере предпоследней строки. Из нее видно, что, если водитель находится в городе 3 и выбирает вторую альтернативу, то с вероятностью одна восьмая попадет клиент, желающий поехать в город 1, причем доход от этого равен 6; с вероятностью три четверти произойдет поездка в город 2, дающая доход 4, и с вероятностью одна восьмая произойдет поездка внутри города 3 с доходом в две единицы.

В этой задаче имеются три состояния, т.е. $N=3$, и три альтернативы в состояниях 1 и 3 и две в состоянии 2, т.е. $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=3$. Значит, имеется $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ возможных политик.

После того как будут изложены методы решения, мы вернемся к этой задаче и продемонстрируем ее численное решение.

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Используем теперь аппарат функциональных уравнений для получения аналитической формулировки задачи, поставленной в § 3. Пусть для $i = 1, 2, \dots, N$; $n = 0, 1, \dots$

$f_n(i)$ — ожидаемый доход при n -шаговом процессе, если начать из состояния i и использовать оптимальную политику. (11.5)

Заметим, что n означает *длину* процесса, тогда как t , используемое в предшествующих параграфах, означало *время*. Тогда принцип оптимальности приводит к рекуррентным соотношениям

$$f_n(i) = \max_q \left[\sum_{j=1}^N p_{ij}(q) (r_{ij}(q) + f_{n-1}(j)) \right], \quad (11.6)$$

для $n = 1, 2, \dots$ и $f_0(i) = 0$; $i = 1, 2, \dots, N$.

Оптимальная политика задается вектором $(q_n(1), q_n(2), \dots, q_n(N))$, определяющим выбор, который надлежит сделать в i -м состоянии, когда осталось n шагов.

6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Хотя в дальнейшем будут приведены численные результаты для задачи этого типа, возникающей при рассмотрении процесса замены оборудования, сделаем уже сейчас некоторые общие замечания.

Проведение вычислений усложняется не столько загрузкой памяти значениями последовательности $\{f_n(i)\}$ и $\{q_n(i)\}$, которой можно пренебречь, сколько необходимостью хранить переходные матрицы $P(q) = (p_{ij}(q))$ и $R(q) = (r_{ij}(q))$.

Если N превышает, например, 1000, то трудности становятся практически непреодолимыми. Чтобы иметь возможность рассматривать задачи действительно крупного масштаба, необходимо изучить аналитическую структуру процесса и использовать полученную таким путем информацию для разработки приближенных методов. Мы будем использовать линейность процесса и простую, но очень важную идею, что подходящим образом определенный идеализированный бесконечный процесс дает превосходное приближение к

процессу даже умеренной длины. Однако для изучения не установившегося состояния необходима точная постановка задачи.

7. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Приближенные методы, которые мы будем использовать, существенно зависят от асимптотического поведения последовательности $\{f_n(i)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Сформулируем следующий результат.

Теорема 1. *Рассмотрим рекуррентное соотношение*

$$f_n(j) = \max_q \left[b_j(q) + \sum_{i=1}^N a_{ij}(q) f_{n-1}(i) \right], \quad (11.7)$$

где предполагается, что

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) } b_j(q) \geq 0 \text{ и } b_j(q) > 0 \text{ для некоторого } j \text{ и всех } q, \\ \text{(b) } a_{ij}(q) \geq d > 0, i, j = 1, 2, \dots, M \text{ равномерно по } q, \\ \text{(c) } \sum_{j=1}^M a_{ij}(q) = 1, i = 1, 2, \dots, M. \end{array} \right\} \quad (11.8)$$

Иными словами, $A(q)$ при каждом q есть транспонированная матрица по отношению к положительной марковской матрице.

Допустим также, что либо

(а) функции $b_i(q)$ и $a_{ij}(q)$ являются функциями конечномерного вектора q , компоненты которого предполагаются принимающими только конечное множество значений, в общем, зависящее от i и j , либо

(б) функции $b_i(q)$ и $a_{ij}(q)$ — непрерывные функции конечномерного вектора q , чьи компоненты принимают значения в некоторых замкнутых ограниченных областях q -пространства.

Положим

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b(q) = \begin{pmatrix} b_1(q) \\ b_2(q) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N(q) \end{pmatrix}, \quad A(q) = (a_{ij}(q)). \quad (11.9)$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$f_n(i) \sim nr, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11.10)$$

где скалярная величина r определяется соотношением

$$r = \max_q \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b(q) + A(q)b(q) + \dots + A(q)^{n-1}b(q)}{n} \right]. \quad (11.11)$$

Доказательство этого результата имеется в статье, упомянутой в библиографии в конце главы. Величина $b_i(q)$ есть математическое ожидание дохода на каждом шаге, обусловленного решением q . Результат интуитивно ясен, так как он утверждает, что мы действуем таким образом, чтобы максимизировать *средний ожидаемый доход*.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Значение этой теоремы заключается в том, что она гарантирует нам корректность очевидного метода определения оптимальной политики. Именно, мы выбираем конкретную политику и используем ее повторно для получения среднего выигрыша. Затем мы выбираем политику, максимизирующую этот средний выигрыш.

С установлением этого результата был открыт путь для ряда простых итеративных методов, которые могут быть использованы более эффективным образом для получения политики в процессе большой длительности.

Как и в теории цепей Маркова, имеется существенная разница между аналитическими результатами в случае положительных коэффициентов и результатами, справедливыми только для неотрицательных коэффициентов. В большинстве приложений часто бывает так, что большая часть коэффициентов равна нулю. Существует несколько путей обхода этой трудности. Во-первых, можно итерировать матрицы несколько раз, пока не исчезнут нули. То обстоятельство, что переходная вероятность не равна нулю, означает, что на любом конкретном шаге имеется путь перехода из i -го состояния в j -е состояние. А факт, что все элементы некоторой итерированной матрицы положительны, означает, что имеется возможность перехода из i -го состояния в j -е состояние не более, чем через некоторое фиксированное число шагов.

В большинстве приложений это в действительности и имеет место. Если же дело обстоит не так, то это обычно служит признаком какого-то объединения двух разных процессов в один процесс ценой потери простоты.

Вторым путем обхода многих тонких вопросов, возникающих при рассмотрении цепей Маркова с нулевыми элементами переходной матрицы, является замена этих нулей малыми величинами. Очевидно, если исходный физический процесс имеет смысл, то малые изменения в переходных вероятностях внесут пренебрежимый эффект в поведение в целом. Получив таким путем переходную матрицу с положительными элементами, мы можем затем использовать соответствующую простую теорию.

9. МЕТОД ХОВАРДА ИТЕРАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИТИК

Итеративный метод в пространстве политик, основанный на предшествующих идеях, детально разработан Р. Ховардом. Мы рассмотрим его метод, который дает оптимальную политику для процессов большой длительности (т. е. «стационарных процессов»), где решения зависят только от состояния, а не от номера шага. Мы будем применять обозначения Р. Ховарда для того, чтобы легче было ссылаться на его работы.

Если определить

V_i^n как математическое ожидание суммарного дохода при n -шаговом процессе, начинающемся в состоянии i , при использовании *фиксированной политики*,

то легко видеть, что V удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$V_i^n = \sum_{j=1}^N p_{ij} (r_{ij} + V_j^{n-1}). \quad (11.12)$$

Для больших n также имеет место равенство

$$V_i^n = v_i + ng, \quad (11.13)$$

если все состояния принадлежат одной и той же цепи*). Как установлено в § 7, это будет заведомо иметь место,

*) Понятие *цепи* подробно рассматривается в книге Ховарда. Его можно найти также в любом руководстве по цепям Маркова.

если все $p_{ij} > 0$. Это уравнение показывает, что доход будет в целом складываться из двух частей: стационарной части ng , обусловленной поведением при $n \rightarrow \infty$, и переходной части v_i , зависящей только от начального состояния.

Подстановка предельного выражения (11.13) в соотношение (11.12) дает:

$$v_i + ng = \sum_{j=1}^N p_{ij} [r_{ij} + v_j + (n-1)g]. \quad (11.14)$$

Так как по определению $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, это выражение упрощается и принимает вид

$$g + v_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} (r_{ij} + v_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.15)$$

10. ОПЕРАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Выше записана система N уравнений с $N+1$ неизвестными, v_i ($i = 1, \dots, N$) и g . Однако, очевидно, прибавление постоянной ко всем v_i не изменяет уравнений. Это значит, что важны лишь относительные значения v_i , а не абсолютные. Следовательно, одна из величин v_i может быть выбрана произвольной, и останется N уравнений с N неизвестными. Если положить $v_N = 0$, то решение уравнений дает средний прирост g за длительное время и относительные значения различных начальных состояний v_i для фиксированной политики.

Говард называет указанный выше прием нахождения выигрыша и переходных значений для заданной политики *операцией определения значения* (VDO) *).

11. ПРОЦЕДУРА УЛУЧШЕНИЯ ПОЛИТИКИ

Теперь мы подошли к основной задаче. Мы показали, как, угадав политику, т. е. определив выбор альтернатив на каждом шаге, вычислить связанные с ней характеристики. Поставим вопрос о нахождении на основе этой информации лучшей политики. Под «лучшей» понимаем политику, дающую

*) VDO — value determination operation. (Прим. ред.)

большее математическое ожидание выигрыша g . Вернемся к уравнению (11.15). Решив его относительно g , получим:

$$g = \sum_{j=1}^N p_{ij}(r_{ij} + v_j) - v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.16)$$

Напомним, что p_{ij} и r_{ij} зависят от конкретной политики, которой мы решили следовать.

Используя значения v_i , связанные со старой политикой, мы можем выбрать новую политику, максимизирующую правую часть равенства (11.16). Обозначив характеристики, связанные с этой политикой, индексом k , выберем такое k при котором обращается в максимум сумма $\sum_{j=1}^N p_{ij}^{(k)}(r_{ij}^{(k)} + v_j) - v_i$, где $p_{ij}^{(k)}$ означают переходные вероятности, связанные с выбором политики k в состоянии i .

Если для заданной политики определены значения g и v , то использование указанного выше правила для построения новой политики называется *процедурой улучшения политики* (PIR)*.

Можно доказать, что это правило

(а) при каждом своем применении приводит к политике, дающей более высокий или по крайней мере такой же выигрыш,

(б) в конечном счете приведет к оптимальной политике.

Доказательства этих фактов существенно опираются на линейность нашей простой модели. Однако интуитивно не очевидно, что решение, диктуемое приростом g и значениями v_i одной политики, приведет к политике с большим выигрышем.

12. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТАКСИ

Вернемся к задаче о такси из § 4 и применим к ней данные выше правила.

В качестве начального приближения выбираем вектор политики

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

который означает, что мы курсируем во всех городах. Это

*) PIR — policy improvement routine. (Илим. ред.)

политика, максимизирующая математическое ожидание непосредственного дохода. Для нее имеем матрицу переходных вероятностей

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

и вектор непосредственного дохода

$$\left[\sum_{j=1}^N p_{ij} r_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Обозначим сумму $\sum_{j=1}^N p_{ij} r_{ij}$ через q_i , поскольку ожидаемый доход зависит только от i . Уравнения для определения значений v_i , если предположить v_3 равным нулю, запишутся в виде

$$g + v_1 = 8 + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{4} v_2,$$

$$g + v_2 = 16 + \frac{1}{2} v_1,$$

$$g = 7 + \frac{1}{4} v_1 + \frac{1}{4} v_2$$

и имеют решение

$$v_1 = 1,33,$$

$$v_2 = 7,47,$$

$$v_3 = 0,$$

$$g = 9,2.$$

Используя политику «всегда курсировать», водитель в среднем будет иметь 9,2 единицы за поездку.

Обращаясь к PIR, вычислим величины $q_i^k + \sum_{j=1}^N p_{ij}^k v_j$ для всех i и k (см. таблицу 11.2).

Мы видим, что для $i=1$ величина в правом столбце максимальна при $k=1$. Для $i=2$ или 3 она максимальна

Таблица 11.2

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^N p_{ij}^k v_j$
1	1	10,50 +
	2	8,43
	3	5,51
2	1	16,67
	2	21,75 +
3	1	9,20
	2	9,66 +
	3	6,75

при $k=2$. Иными словами, наша новая политика будет определяться вектором

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Это значит, что если такси находится в городе 1, то оно должно курсировать; если в городе 2 или 3, то оно должно подъезжать к ближайшей стоянке.

Теперь имеем:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \quad [q_i] = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Возвращаясь к VDO, решим уравнения

$$g + v_1 = 8 + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{4} v_2 + \frac{1}{4} v_3,$$

$$g + v_2 = 15 + \frac{1}{16} v_1 + \frac{7}{8} v_2 + \frac{1}{16} v_3,$$

$$g + v_3 = 4 + \frac{1}{8} v_1 + \frac{3}{4} v_2 + \frac{1}{8} v_3.$$

Снова, полагая $v_3 = 0$, получим:

$$v_1 = 3,88,$$

$$v_2 = 12,85,$$

$$v_3 = 0,$$

$$g = 13,15.$$

Заметим, что g возросло от 9,2 до 13,15, чего мы и добились, так что шофер зарабатывает в среднем за поездку 13,15 единицы. Используя PIR для этих значений, получим:

i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^N p_{ij}^k v_j$
1	1	9,27
	2	12,14 +
	3	4,91
2	1	14,06
	2	26,00 +
3	1	9,26
	2	12,02 +
	3	2,37

Новая политика, таким образом, определяется вектором

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Такси должно подъезжать к ближайшей стоянке независимо от города, в котором находится.

При этой политике имеем:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

$$[q_i] = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Используя VDO, получим:

$$g + v_1 = 2,75 + \frac{1}{16} v_1 + \frac{3}{4} v_2 + \frac{3}{16} v_3,$$

$$g + v_2 = 15 + \frac{1}{16} v_1 + \frac{7}{8} v_2 + \frac{1}{16} v_3,$$

$$g + v_3 = 4 + \frac{1}{8} v_1 + \frac{3}{4} v_2 + \frac{1}{8} v_3.$$

При $v_3 = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} v_1 &= -1,18, & v_2 &= 0, \\ v_2 &= 12,66, & g &= 13,34. \end{aligned}$$

Заметим, что произошло определенное возрастание, хотя и небольшое, значения g от 13,15 до 13,34.

Применяя PIR, получим результаты, приведенные в таблице 11.3.

Таблица 11.3

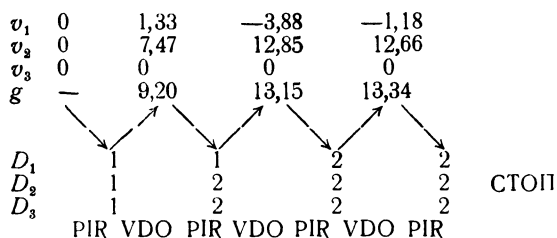
i	k	$q_i^k + \sum_{j=1}^N p_{ij}^k v_j$
1	1	10,57
	2	12,16 +
	3	5,53
2	1	15,41
	2	26,00 +
3	1	9,86
	2	13,33 +
	3	5,40

Вектором новой политики будет вектор

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

который совпадает с вектором предыдущей политики, так что процесс сошелся и величина g достигла своего максимума, равного 13,34. Водитель такси должен в любом городе подъезжать к ближайшей стоянке. Применение такой политики дает в среднем за поездку доход в 13,34 единицы, почти в полтора раза больший, чем при политике постоянного курсирования, найденной максимизацией непосредственного дохода. Выпишем результаты вычислений (с точностью

до двух десятичных знаков)



Заметим, что оптимальная политика, предписывающая всегда подъезжать к стоянке, является *наихудшей* политикой с точки зрения непосредственного дохода. В последовательных процессах решения часто оказывается, что лучше журавль в небе, чем синица в руки.

13. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ЗАДАЧА

До сих пор мы требовали, чтобы существовал единственный выигрыш g , связанный с задачей. Это означает, что имеется только одна цепь и какую бы политику мы ни выбрали, из любого состояния можно перейти в любое другое. Гарантировать этот результат можно, например, взяв все p_{ij} положительными.

Хотелось бы, однако, чтобы наш метод был пригоден для более общего случая, когда имеется несколько цепей. Вот, например, переходная матрица такой задачи:

$$[p_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}.$$

Здесь, если мы выходим из состояния 1 или 2, то нет возможности перейти в 3-е или 4-е состояния, и наоборот. При соответствующей матрице дохода мы будем иметь один асимптотический средний выигрыш, связанный с выходом из

состояний 1 или 2, а другой — с выходом из состояний 3 и 4. Это приводит в общем к необходимости индексирования выигрыша, причем g_i будет означать выигрыш для цепи 1, g_2 — для цепи 2 и т. д. Используя эти обозначения, перейдем к более общему алгоритму, который мы опишем схематически.

14. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Используя p_{ij} и q_i для заданной политики, решим систему уравнений

$$g_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} g_j$$

$$v_i + g_i = q_i + \sum_{j=1}^N p_{ij} v_j$$

для всех v_i и g_i . Решение будет содержать столько произвольных постоянных, сколько имеется независимых цепей Маркова; эти постоянные можно положить равными нулю.

Для каждого состояния i находим альтернативу k , которая максимизирует сумму $\sum_{j=1}^N p_{ij}^k g_j$ и примем ее за но-

вое решение в i -м состоянии. Если $\sum_{j=1}^N p_{ij}^k g_j$ одинакова для

всех альтернатив, то решение следует принять на основе переходных значений v_i , а не выигрышей g_i . Следовательно, если критерий выигрыша теряет силу, то находим альтернативу k , максимизирующую сумму $q_i^k +$

$+\sum_{j=1}^N p_{ij}^k v_j$, и примем ее за новое решение в i -м состоянии.

Если старое решение в i -м состоянии придает такое же большое значение величине критерия, как любая другая альтернатива, оставляем старое решение неизменным, независимо от того, основан ли тест улучшения политики на выигрышах g_i или на значениях v_i . Это правило гарантирует сходимость в случае эквивалентных политик.

Когда эта процедура повторена для всех состояний, то определяется новая политика и получаются новые матрицы $[p_{ij}]$ и $[q_i]$. Если новая политика совпадает с предыдущей, то процесс вычислений сошелся и наилучшая политика найдена.

15. ЗАДАЧИ О ЗАМЕНЕ ОБОРУДОВАНИЯ В ПЕРЕСМОТРЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В § 12 главы III мы довольно подробно рассмотрели задачу о замене оборудования. Предложенный там метод заключался в решении некоторой задачи с конечным временем с помощью итерации рекуррентного соотношения. Это позволяет включить в рассмотрение стоимостные изменения как функцию реального времени, так и функцию срока службы.

Если ищется решение с бесконечным временем, мы можем итерировать уравнение, пока средний доход за шаг не будет равен постоянной с любой требуемой степенью точности, однако при использовании этого метода редко можно безусловно утверждать, что политика сходится. В качестве примера этого метода мы рассмотрим задачу о замене оборудования. Затем мы применим к аналогичной задаче метод пространства политик.

16. ЗАДАЧА О ПРОИЗВОДСТВЕ ШИН

При производстве резиновых шин используется машина с двумя устройствами, на которых одновременно изготавливается по одной шине. Если устройство отказывает, то изготавливается дефектная шина, что приносит убыток c_2 . В случае поломки устройства машина должна быть остановлена для его замены, в результате чего появляются издержки c_3 , отражающие стоимость вложенного труда, и издержки c_4 , отражающие потерю производственного времени. Новое устройство стоит c_1 . Когда машина остановлена, издержки по замене второго устройства равны стоимости такого устройства.

При замене устройств до поломки можно избежать потери стоимости дефектной шины c_2 и производственных затрат c_4 . Однако такая политика с неизбежностью приведет к покупке большого числа новых устройств, а также потребует больше труда, чем политика замены после отказа в работе. Задача заключается в отыскании оптимальной политики замены.

17. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Начнем с определения функции

$f_N(i, j)$ — суммарной ожидаемой стоимости производства N дополнительных шин, если устройство 1 уже произвело i шин, а устройство 2 произвело j шин, и при этом использовалась оптимальная политика замены. (11.17)

Мы ищем $f_N(0, 0)/N$ — ожидаемые средние издержки на одну шину при изготовлении N шин, когда процесс начинался при новых устройствах и использовалась оптимальная политика. Еще больший интерес представляет соответствующая политика замены. Определим p_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, как вероятности успешного изготовления шины устройством, которое уже произвело i шин, и допустим, что эти величины известны из опыта. Тогда, обращаясь к определению $f_N(i, j)$, получим рекуррентное соотношение

$$f_N(i, j) = \min \left[\begin{array}{l} \text{Производить:} \\ p_i p_j f_{N-2}(i+1, j+1) + \\ + (1-p_i)(1-p_j)[2c_1 + 2c_2 + \\ + c_3 + c_4 + f_N(0, 0)] + \\ + (1-p_i)p_j \min [c_1 + c_2 + c_3 + \\ + c_4 + f_{N-1}(0, j+1), 2c_1 + \\ + c_2 + c_3 + c_4 + f_{N-1}(0, 0)] + \\ + p_i(1-p_j) \min [c_1 + c_2 + c_3 + \\ + c_4 + f_{N-1}(i+1, 0), 2c_1 + \\ + c_2 + c_3 + c_4 + f_{N-1}(0, 0)], \\ \text{Заменить устройство } i: \\ c_1 + c_3 + f_N(0, j), \\ \text{Заменить устройство } j: \\ c_1 + c_3 + f_N(i, 0), \\ \text{Заменить оба устройства:} \\ 2c_1 + c_3 + f_N(0, 0). \end{array} \right]. \quad (11.18)$$

Это уравнение задает ожидаемые издержки при каждом допустимом решении в виде суммы непосредственной стоимости и ожидаемых издержек оптимального производства оставшихся шин после выполнения решения и дает возможность выбора наилучшей альтернативы. Задача решается следующим образом: сначала вычисляется стоимость одной шины $f_1(i, j)$, затем значение f_1 используется для вычисления f_2 с помощью уравнения (11.18), f_2 в свою очередь используется для вычисления f_3 и т. д.

18. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Для иллюстрации выберем следующие гипотетические числа:

стоимость устройства $c_1 = 50$
 убытки, связанные с производством одной
 бракованной шины $c_2 = 1$
 стоимость труда по остановке машины . . $c_3 = 2$
 убытки из-за потери производственного
 времени $c_4 = 3$.

Вероятности выпуска шины без дефектов

Номер произведенной шины x	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность p_x	1	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Последовательные итерации рекуррентного соотношения (11.18) дают следующие результаты:

1. Для процессов производства более чем 15 шин оптимальная политика сходится к (а) замене любого устройства, которое произвело шесть шин, (б) замене другого устройства в то же самое время, если оно изготовило пять или более шин, когда машина остановлена для предварительной замены или же из-за неисправности.

2. Издержки на производство каждой дополнительной шины сходятся к 16,94, после того как произведено примерно 47 шин.

19. ДРУГОЙ ПРИМЕР

Для того чтобы показать, что оптимальная политика не обязательно будет такой простой, снизим стоимость нового устройства с 50 единиц до 10 и вычислим новые ожидаемые издержки, а также оптимальную политику. (См. табл. 11.4.)

Таблица 11.4

Средняя стоимость шины: 6,364.

Политика:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
0	$P-1$	$P-1$	$P-2$	$P-2$	$R-1$	$R-1$	$R-1$
1	$P-1$	$P-1$	$P-2$	$P-2$	$R-1$	$R-1$	$R-1$
2	$P-2$	$P-2$	$P-3$	$P-3$	$P-3$	$R-1$	$R-1$
3	$P-2$	$P-2$	$P-3$	$P-3$	$P-3$	$P-3$	$R-2$
4	$R-1$	$R-1$	$P-3$	$P-3$	$P-3$	$R-2$	$R-2$
5	$R-1$	$R-1$	$R-1$	$P-3$	$R-2$	$R-2$	$R-2$
6	$R-1$	$R-1$	$R-1$	$R-2$	$R-2$	$R-2$	$R-2$

Здесь $P-1$ — означает производить, а если сломалось одно из устройств, то заменить только это устройство.

$P-2$ — означает производить, а если неисправно более новое устройство, то заменить оба; если более старое, то заменить только его.

$P-3$ — означает производить, а если одно из двух устройств неисправно, то заменить оба.

$R-1$ — означает немедленную замену более старого устройства.

$R-2$ — означает немедленную замену обоих устройств.

i — число шин, произведенных ранее первым устройством.

j — число шин, произведенных ранее вторым устройством.

Как видно из приведенной выше таблицы, мы теперь следуем в корне отличной политике. Политика, полученная итерацией уравнения (11.18), не имеет уже простой формы: заменять более старое устройство, когда оно произвело m шин, и одновременно заменять другое устройство, если оно произвело более чем n шин. В действительности использование какой-либо политики такого типа даст средние издержки на шину, превышающие 6,364.

Каждый из указанных выше числовых расчетов требует только одной минуты машинного времени при работе на машине Джонниак.

20. ЗАДАЧА О ЗАМЕНЕ АВТОМАШИНЫ

Метод Ховарда дает иной подход к задачам этого типа. Полезно проследить, как с его помощью формулируется и решается задача о замене.

Для того чтобы продемонстрировать эти идеи, рассмотрим задачу замены автомашины за временной интервал в десять лет. Мы условимся анализировать нашу текущую ситуацию каждые три месяца и в этот момент принимать решение о сохранении имеющейся автомашины или о ее продаже. Состояние системы i описывается сроком службы машины в единицах времени, равных трем месяцам; i может принимать значения от 1 до 40. Чтобы ограничить число состояний, автомашины возраста 40 будут считаться навсегда имеющими этот возраст (машина рассматривается как в основном изношенная). В каждом состоянии имеются следующие альтернативы: первая альтернатива, $k=1$, сохранить имеющуюся машину на следующий квартал; другие альтернативы, $k>1$, купить машину возраста $k-2$, где $k-2$ не более 39. Тогда мы имеем сорок состояний с сорока одной альтернативой в каждом состоянии, так что всего имеется 41^{40} возможных политик. Примем следующие обозначения:

C_i — закупочная цена машины возраста i ,

T_i — продажная цена машины возраста i ,

E_i — ожидаемая величина эксплуатационных расходов на машину возраста i , пока она не достигнет возраста $i+1$,

p_i — вероятность того, что машина возраста i не потребует до возраста $i+1$ слишком больших издержек на ремонт.

Определенные выше вероятности с необходимостью ограничивают число состояний. Машина любого возраста, обладающая безнадежными поломками, немедленно приписывается к состоянию 40. Естественно, $p_{40} = 0$.

Основными уравнениями, управляющими системой, когда она находится в i -м состоянии, являются следующие: если $k = 1$ (т. е. сохраняется имеющаяся машина), то

$$g + v_i = -E_i + p_i v_{i+1} + (1 - p_i) v_{40}.$$

Если же $k > 1$ (машина обменивается на машину возраста $k - 2$), то

$$g + v_i = T_i - C_{k-2} - E_{k-2} + p_{k-2} v_{k-1} + (1 - p_{k-2}) v_{40}.$$

Нетрудно переписать эти уравнения в наших прежних обозначениях. Например,

$$q_i^k = -E_i \quad \text{при } k = 1,$$

$$p_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ll} p_i & j = i + 1 \\ 1 - p_i & j = 40 \\ 0 & \text{при других } j \end{array} \right\} \quad \text{при } k = 1,$$

$$q_i^k = T_i - C_{k-2} - E_{k-2} \quad \text{при } k > 1,$$

$$p_{ij}^k = \left\{ \begin{array}{ll} p_{k-2} & j = k - 1 \\ 1 - p_{k-2} & j = 40 \\ 0 & \text{при других } j \end{array} \right\} \quad \text{при } k > 1.$$

Реальные данные, использованные в задаче, приведены в таблице 11.5 и на графике, изображенном на рис. 89. Разрывы в функциях издержек и продажных цен введены для того, чтобы учесть характерные годовые эффекты.

Задача замены автомашины была решена методом, использующим системы уравнений, за семь итераций. Последовательности политик, средних выигрышей и переходных значений приведены в таблицах 11.6—11.8. Оптимальная политика, полученная при седьмой итерации, заключается в следующем.

Если вы имеете машину возраста большего, чем $1\frac{1}{2}$ года, но меньшего, чем $6\frac{1}{2}$ лет, то сохраните ее. Если вы имеете машину любого другого возраста, обменяйте ее на трехлетнюю машину. Это, по-видимому, вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями относительно экономики владения автомашиной. Отметим, что в случае, если мы собираемся

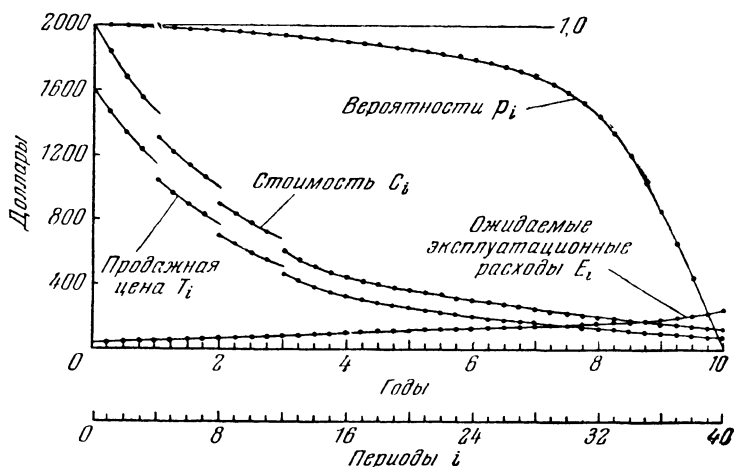


Рис. 89. Данные задачи о замене автомашины.

произвести обмен, эта программа на любой итерации предписывает заменять старую машину машиной, возраст которой не зависит от возраста имеющейся машины. Это именно тот результат, который подсказывается логикой ситуаций.

Если мы будем следовать нашей оптимальной политике, то мы сохраним машину, пока она не прослужит $6\frac{1}{2}$ лет, а затем купим машину трех лет. Однако допустим, что когда нашей машине исполнилось 4 года, некто предложил обменять на нее свою машину возраста 1 год за сумму, равную a . Следует ли нам принять его предложение? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны посмотреть на переходные значения.

На каждой итерации в целях упрощения вычислений значение в состоянии 40 было положено равным нулю. В таблице 11.8 даны также значения при наилучшей политике, когда

Таблица 11.5

Данные задачи о замене *)

Возраст в периодах i	Закупочная цена C_i	Продажная цена T_i	Ожидаемые эксплуатационные расходы E_i	Вероятность P_i
0	2000	1600	50	1,000
1	1840	1460	53	0,999
2	1680	1340	56	0,998
3	1560	1230	59	0,997
4	1300	1050	62	0,996
5	1220	980	65	0,994
6	1150	910	68	0,991
7	1080	840	71	0,988
8	900	710	75	0,985
9	840	650	78	0,983
10	780	600	81	0,980
11	730	550	84	0,975
12	600	480	87	0,970
13	560	430	90	0,965
14	520	390	93	0,960
15	480	360	96	0,955
16	440	330	100	0,950
17	420	310	103	0,945
18	400	290	106	0,940
19	380	270	109	0,935
20	360	255	112	0,930
21	345	240	115	0,925
22	330	225	118	0,919
23	315	210	121	0,910
24	300	200	125	0,900
25	290	190	129	0,890
26	280	180	133	0,880
27	265	170	137	0,865
28	250	160	141	0,850
29	240	150	145	0,820
30	230	145	150	0,790
31	220	140	155	0,760
32	210	135	160	0,730
33	200	130	167	0,660
34	190	120	175	0,590
35	180	115	182	0,510
36	170	110	190	0,430
37	160	105	205	0,300
38	150	95	220	0,200
39	140	87	235	0,100
40	130	80	250	0

*) Цены даны в долларах.

Таблица 11.6

Результаты по задаче о замене автомашины *)

Состояние	Итерация 1		Итерация 2		Итерация 3	
	выигрыш	— 250,00	выигрыш	— 193,89	выигрыш	— 162,44
	решение	значение	решение	значение	решение	значение
1	Купить 36	1373,61	Купить 20	1380,00	Купить 19	1380,00
2	» 36	1253,61	» 20	1260,00	» 19	1260,00
3	» 36	1143,61	» 20	1150,00	» 19	1150,00
4	» 36	963,61	» 20	970,00	Сохранить	1036,63
5	» 36	893,61	» 20	900,00	»	939,95
6	» 36	823,61	» 20	830,00	»	847,60
7	» 36	753,61	» 20	760,00	Купить 19	760,00
8	» 36	623,61	» 20	630,00	Сохранить	695,44
9	» 36	563,61	» 20	570,00	»	617,26
10	» 36	513,61	» 20	520,00	»	542,04
11	» 36	463,61	» 20	470,00	Купить 19	470,00
12	» 36	393,61	» 20	400,00	» 19	400,00
13	» 36	343,61	» 20	350,00	Сохранить	575,00
14	» 36	303,61	» 20	310,00	»	520,79
15	» 36	273,61	» 20	280,00	»	470,00
16	» 36	243,61	» 20	250,00	»	422,74
17	» 36	223,61	» 20	230,00	»	379,26
18	» 36	203,61	» 20	210,00	»	338,44
19	» 36	183,61	» 20	190,00	»	300,00
20	» 36	168,61	Сохранить	280,00	»	263,70
21	Сохранить	875,93	»	213,02	»	229,32
22	»	801,00	Купить 20	145,00	»	196,62
23	»	727,97	» 20	130,00	»	165,60
24	»	658,21	» 20	120,00	»	136,44
25	»	592,45	» 20	110,00	Купить 19	110,00
26	»	529,72	» 20	100,00	» 19	100,00
27	»	469,00	» 20	90,00	» 19	90,00
28	»	411,56	» 20	80,00	» 19	80,00
29	»	355,95	» 20	70,00	» 19	70,00
30	»	306,04	» 20	65,00	» 19	65,00
31	»	260,81	» 20	60,00	» 19	60,00
32	»	218,18	» 20	55,00	» 19	55,00
33	»	175,58	» 20	50,00	» 19	50,00
34	»	140,28	» 20	40,00	» 19	40,00
35	»	110,64	» 20	35,00	» 19	35,00
36	»	83,61	» 20	30,00	» 19	30,00
37	»	54,90	» 20	25,00	» 19	25,00
38	»	33,00	» 20	15,00	» 19	15,00
39	»	15,00	» 20	7,00	» 19	7,00
40	»	0,00	» 20	0,00	» 19	0,00

*) Цены в таблицах 11.5, 11.6, 11.7 даны в долларах.

Таблица 11.7

Результаты по задаче о замене автомашины

Состояние	Итерация 4		Итерация 5		Итерация 6	
	выигрыш — 157,07		выигрыш — 151,05		выигрыш — 150,99	
	решение	значение	решение	значение	решение	значение
1	Купить 12	1380,00	Купить 12	1380,00	Купить 12	1380,00
2	» 12	1260,00	» 12	1260,0	» 12	1260,00
3	» 12	1150,00	» 12	1150,00	» 12	1150,00
4	» 12	970,00	Сохранить	1002,62	Сохранить	1072,26
5	» 12	900,00	»	917,24	»	987,22
6	» 12	830,00	»	836,21	»	906,67
7	» 12	760,00	Купить 12	760,00	»	831,16
8	» 12	630,00	Сохранить	760,54	»	760,30
9	» 12	570,00	»	694,91	»	694,73
10	» 12	520,00	»	632,62	»	632,50
11	» 12	470,00	»	574,05	»	573,99
12	Сохранить	520,00	»	520,00	»	520,00
13	»	463,84	»	470,05	»	470,12
14	»	411,16	»	423,84	»	423,97
15	»	361,55	»	381,03	»	381,23
16	»	314,63	»	341,34	»	341,61
17	»	271,11	»	305,57	»	305,92
18	»	229,67	»	272,50	»	272,95
19	Купить 12	190,00	»	241,97	»	242,51
20	» 12	175,00	»	213,82	»	214,46
21	» 12	160,00	»	187,93	»	188,68
22	» 12	145,00	»	164,19	»	165,07
23	» 12	130,00	»	142,70	»	143,73
24	» 12	120,00	»	123,79	»	124,99
25	» 12	110,00	»	108,60	Купить 12	110,00
26	» 12	100,00	»	97,25	» 12	100,00
27	» 12	90,00	Купить 12	90,00	» 12	90,00
28	» 12	80,00	» 12	80,00	» 12	80,00
29	» 12	70,00	» 12	70,00	» 12	70,00
30	» 12	65,00	» 12	65,00	» 12	65,00
31	» 12	60,00	» 12	60,00	» 12	60,00
32	» 12	55,00	» 12	55,00	» 12	55,00
33	» 12	50,00	» 12	50,00	» 12	50,00
34	» 12	40,00	» 12	40,00	» 12	40,00
35	» 12	35,00	» 12	35,00	» 12	35,00
36	» 12	30,00	» 12	30,00	» 12	30,00
37	» 12	25,00	» 12	25,00	» 12	25,00
38	» 12	15,00	» 12	15,00	» 12	15,00
39	» 12	7,00	» 12	7,00	» 12	7,00
40	» 12	0,00	» 12	0,00	» 12	0,00

Таблица 11.8

Результаты по задаче о замене автомашин

Состояние	Итерация 7		Итерация 8 (значения)
	выигрыш	— 150,95	$v_{40} = 80$ долларов
	решение	значение	продажная цена
1	Купить 12	1380,00	1460,00
2	» 12	1260,00	1340,00
3	Сохранить	1160,66	1240,66
4	»	1071,93	1151,94
5	»	986,93	1066,93
6	»	906,43	986,43
7	»	830,96	910,96
8	»	760,13	840,13
9	»	694,61	774,61
10	»	632,41	712,41
11	»	573,95	653,95
12	»	520,00	600,00
13	»	470,16	550,16
14	»	424,05	504,05
15	»	381,36	461,36
16	»	341,80	421,80
17	»	306,16	386,16
18	»	273,24	353,24
19	»	242,87	322,87
20	»	214,89	294,89
21	»	189,19	269,19
22	»	165,67	245,67
23	»	144,42	224,42
24	»	125,80	205,80
25	»	110,95	190,95
26	Купить 12	100,00	180,00
27	» 12	90,00	170,00
28	» 12	80,00	160,00
29	» 12	70,00	150,00
30	» 12	65,00	145,00
31	» 12	60,00	140,00
32	» 12	55,00	135,00
33	» 12	50,00	130,00
34	» 12	40,00	120,00
35	» 12	35,00	115,00
36	» 12	30,00	110,00
37	» 12	25,00	105,00
38	» 12	15,00	95,00
39	» 12	7,00	87,00
40	» 12	0,00	80,00

значение состояния 40 положено равным 80 долларов, продажной цене машины такого возраста. В этом случае каждое v_i представляет собой значение машины возраста i для лица, которое следует оптимальной политике. Чтобы ответить на поставленный выше вопрос, мы должны сравнить значение машины возраста 1 год, $v_4 = 1151,93$ доллара, со значением четырехлетней машины, $v_{16} = 421,80$ доллара. Если запрашиваемая приплата a меньше чем $v_4 - v_{16} \approx 730$ долларов, то

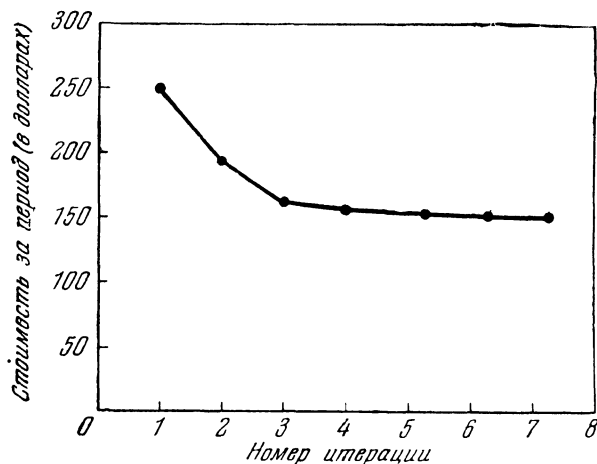


Рис. 90. График уменьшения с номером итерации стоимости для задачи о замене автомашины.

нам следовало бы согласиться на сделку, в противном случае — нет. Конечно, для ответа на поставленный вопрос не необходимости делать v_{40} отличным от нуля; однако если взять $v_{40} = 80$ долларов, то переходные значения получают наряду с относительной физической интерпретацией также абсолютную.

Если следовать оптимальной политике, то годовая стоимость использования машины равна примерно 604 долларам ($4 \times 150,95$ доллара). Если бы мы следовали политике максимизации непосредственного дохода (показанной при итерации 1), то средняя годовая стоимость была бы равна 1000 долларов. Таким образом, следование политике максимизации будущего дохода, а не непосредственного имеет результатом

экономии почти в 400 долларов за год. Уменьшение стоимости за период с номером итерации показано на рис. 90. Выигрыш приближается к оптимальному значению, грубо говоря, экспоненциально. Заметим, что выигрыши на последних трех итерациях настолько близки, что с точки зрения практики соответствующие политики можно рассматривать как эквивалентные. Тот факт, что трехлетняя машина является наилучшей при покупке, выявляется уже на четвертой итерации. Разрывы в функциях, имеющие место для трех лег, несомненно, объясняют этот выбор.

21. МЕТОД ИМИТИРОВАНИЯ

Описанный выше метод включает решение системы уравнений. Если система плохо определена или если число уравнений велико, то аналитически нельзя получить точных решений. Чтобы обойти эти трудности, был создан метод имитирования.

22. СВЯЗЬ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ

Наиболее существенной чертой рассмотренных нами процессов является тот факт, что определение асимптотического стационарного режима для них можно выполнить с помощью линейного программирования. Это важно потому, что в настоящее время в этой теории имеется много весьма эффективных алгоритмов, пригодных для решения задач большого размера. Так как для описания этих результатов потребовалось бы слишком много отступлений, мы отошлем читателя к некоторым оригинальным работам, перечисленным в конце главы.

23. РЕЗЮМЕ

В этой главе мы описали применение метода «приближения в пространстве политик», весьма удобного для исследования марковских процессов решения, где имеет смысл изучение асимптотического поведения. Во многих случаях можно показать, что режим устанавливается очень быстро. В других же случаях может оказаться, что только стационарный режим и представляет интерес. Следовательно, результаты, содержа-

шиеся в предшествующих параграфах, можно применить целым рядом способов.

Наиболее трудной задачей в этой области в настоящее время является задача, относящаяся к развитию эффективных методов для рассмотрения переходных состояний. Здесь необходимы совсем другого рода приближения в пространстве политик.

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§ 2. Превосходное изложение основ теории марковских процессов можно найти в книгах:

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1957 [русский перевод: В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей*, ИЛ, 1951; 2-е изд., «Мир», 1964.]

J. G. Kemeny and J. L. Snell, *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1960.

§ 3. Определение марковских процессов решения дано в книге

R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press., Princeton, New Jersey, 1957, Chapter XI [русский перевод: Р. Беллман, *Динамическое программирование*, ИЛ, 1960].

§ 7. Доказательство можно найти в статье:

R. Bellman, *A Markovian decision process*, J. Math. and Mech., vol. 6, 1957, pp. 679—684.

Многочисленные обобщения и применения к задаче оптимального управления запасами можно найти в неопубликованной диссертации Д. Айгххарта (математический факультет Принстонского университета, 1960 г.)

§§ 9—14. Эти результаты даны Р. Ховардом в его диссертации в Массачусетском Технологическом институте. Многие дальнейшие результаты приведены в его книге:

R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, Technology Press and John Wiley and Sons, New York, 1960. [Русский перевод: Р. Ховард, *Динамическое программирование и марковские процессы*, М., «Сов. радио», 1964].

§§ 16—20. Эти результаты впервые изложены в работе

S. Dreyfus, *A note on an industrial replacement process*, Operational Research Q., vol. 8, 1957, pp. 190—193.

§ 21. О методе имитирования см.

R. Rosenstiehl and A. Ghouila — Hour i, *Les choix économiques, décisions séquentielles et simulation*, Dunod., Paris, 1960.

R. Bellman, F. Ricciardi, D. Malcolm, C. Clark and C. Craft, On Top-Management Simulation, American Management Assoc., New York, 1957.

§ 22. Значительная работа по численному решению уравнений для стационарного режима выполнена Бекманном, Манном и другими авторами. Некоторые новые результаты, а также другие ссылки даны в статье:

F. D. Ерeнoуx, Sur un problème de production et de stockage dans l'aléatoire, Revue Française Recherche Opérationnelle, no. 14, 1960, pp. 3—16.

Мы не касались связи между приведенными здесь результатами и теорией последовательных машин и, в частности, многих трудных и важных вопросов, возникающих в математических исследованиях медицинской диагностики.

См. главу VIII книги:

R. Bellman, Adaptive Control Processes: A Guided Tour. Princeton University Press., Princeton, New Jersey, 1961, где можно найти много ссылок, а также статьи:

R. S. Ledley and L. B. Lusted, Reasoning foundations of medical diagnosis, Science, vol. 130, 1959, pp. 9—21.

B. B. Winter, Optimal diagnostic procedures, IRE Trans. on Reliability and Quality Control, vol. RQC-9, 1960, pp. 13—19.

J. E. Overall and C. M. Williams, Models for medical diagnosis, Behavioral Science, vol. 6, 1961, pp. 134—141.

Следующие работы представляют интерес в связи с предыдущей главой:

D. Blackwell, On the functional equation of dynamic programming, J. Math. Analysis and Appl., vol. 2, 1961.

H. Raiffa and R. Schlaifer, Applied Statistical Decision Theory, Harvard Business School, 1961.

J. L. Fisher, A class of stochastic investment problems, Operations Research, vol. 9, 1961, pp. 53—65.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Изложение теории марковских цепей дано в книге:

В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1948.

По поводу связи с линейным программированием (§ 22) см.

A. S. Manne, Linear programming and sequential decisions, Management Sci., vol. 6, 1960, pp. 259—267.

ГЛАВА XII

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей заключительной главе мы намерены обсудить ряд вопросов, общих для всех рассмотренных ранее задач. К ним относятся вопросы точности, сокращения времени вычислений и понижения размерности. Так как в этих областях до сих пор сделано очень мало, наше изложение неизбежно будет эскизным.

Мы начнем с вопроса о полиномиальной аппроксимации и приведем теоретические и практические результаты. Затем мы рассмотрим применение вытекающих отсюда методов к решению задач о процессах распределения ресурсов и управления.

В заключение сравниваются результаты, полученные с помощью метода функциональных уравнений, с точными решениями некоторых простых задач вариационного исчисления.

2. ТРУДНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С РАЗМЕРНОСТЬЮ

Рассмотрим задачу максимизации функции

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (12.1)$$

по всем неотрицательным x_i , удовлетворяющим условиям:

$$\sum_{j=1}^N b_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (12.2)$$

где $b_{ij} \geq 0$.

Как известно, эта задача приводит нас к рекуррентному соотношению

$$f_N(c_1, c_2, \dots, c_M) = \max_{x_N} [g_N(x_N) + f_{N-1}(c_1 - b_{1N}x_N, \\ c_2 - b_{2N}x_N, \dots, c_M - b_{MN}x_N)], \quad (12.3)$$

где

$$b_{iN}x_N \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (12.4)$$

При $M=1$ решение требует несложных вычислений, при $M=2$ счет будет немногим сложнее, если мы привлечем описанные выше методы. При $M \geq 3$ мы должны либо перейти к более грубой сетке, либо к более тонким методам, чтобы преодолеть ограниченность памяти вычислительной машины.

3. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим один из наиболее многообещающих методов преодоления «проклятия размерности» — приближение функций полиномами.

Если $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на интервале $0 \leq x \leq 1$, то мы можем хранить ее, протабулировав ее значения в точках сетки

$$x = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta = 1.$$

Точность такого представления функции определяется величиной Δ . Однако чем меньше величина Δ , тем больше значений функции должно быть вычислено и запомнено. Следовательно, в любом случае мы должны стремиться к компромиссу между издержками вследствие увеличения времени счета и издержками, обусловленными неточностью результатов.

Когда мы имеем дело с функциями нескольких переменных, основным ограничением являются не издержки или время, а объем оперативной памяти вычислительной машины. В случае функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, определенной в области $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$, даже при шаге $\Delta = 0,1$ по каждой из переменных, мы приходим к необходимости табулирования функции в 10^4 точек.

Нам хотелось бы найти более экономное представление для функции. Возвращаясь к функциям одной переменной,

исследуем осуществимость аппроксимации с помощью полиномов

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^N a_k x^k. \quad (12.5)$$

Теперь функция может храниться в виде набора коэффициентов $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ и правила вычисления значений соответствующего полинома. Таким образом, мы можем получить значение $f(x)$ для произвольного x в интервале $[0, 1]$, затратив относительно малую долю ячеек памяти.

4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Теперь возникает задача об определении для заданной функции $f(x)$ коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_k . Несмотря на то, что весьма соблазнительно использовать первые $N+1$ членов разложения $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $x=0$ или, может быть, $x=0,5$, мы отвергнем эту идею по двум причинам. Во-первых, ряд Тейлора может расходиться вне малого интервала, содержащего точку $x=0$ или $x=1/2$. Еще более важной является вторая причина — мы всегда относимся с большой подозрительностью к методу, который требует знания производных функции, заданной численно или графически.

Вернемся к полиномам, но заменим разложение Тейлора более мощным разложением в ряд по ортогональным полиномам. Для интервала $[0, 1]$ мы будем использовать полиномы Лежандра. Для упрощения обозначений заменим интервал $[0, 1]$ на интервал $[-1, 1]$, чтобы иметь возможность применять полиномы Лежандра в их обычной форме.

Как известно, полиномы Лежандра $\{P_n(x)\}$, $n=0, 1, \dots$, $P_0(x)=1$, образуют последовательность полиномов возрастающей степени, обладающих тем свойством, что

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (12.6)$$

Нормируя полиномы соответствующим образом, можно обеспечить, чтобы

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = 1. \quad (12.7)$$

Отсюда чисто формально заключаем, что **если** записать

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (12.8)$$

— $1 \leq x \leq 1$, то коэффициенты a_n можно **определить** из соотношения

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (12.9)$$

Следовательно, в качестве нашего приближения для $f(x)$ полиномом степени N мы берем частную сумму этого ряда

$$a_0 + a_1 P_1(x) + \dots + a_N P_N(x), \quad (12.10)$$

где a_n определяются согласно (12.9).

Это представление коэффициентов имеет большое преимущество, так как оно зависит только от значений самой функции и не зависит от значений ее производных.

5. ГАУССОВЫ КВАДРАТУРЫ

Возникает вопрос о вычислении коэффициентов a_k . Если мы попытаемся получить их значения, аппроксимируя интеграл в (12.9) римановой суммой

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \sum_k f(k\Delta) P_n(k\Delta) (\Delta), \quad (12.11)$$

то мы столкнемся с прежними трудностями табулирования значений через равные интервалы. Если бы мы предполагали табулировать $f(x)$, то могли бы с тем же успехом делать это с самого начала.

Мы обойдем эту трудность, воспользовавшись одной из квадратурных формул, в данном случае квадратурной формулой Гаусса. Вместо того чтобы пользоваться римановыми суммами, применим приближенную квадратурную формулу. Окончательная формула примет вид

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \cong \sum_{k=1}^R \mu_k g(x_k), \quad (12.12)$$

где веса μ_k и точки x_k зависят от R . Мы можем выбрать R величин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_R$ и R точек x_1, x_2, \dots, x_R так, чтобы соотношение (12.12) было точным для любого полинома $g(x)$ степени не выше $2R - 1$.

Коэффициенты a_n , определенные через интеграл, фигурирующий в (12.11), вычисляются с помощью выражения

$$a_n = \sum_{k=1}^R \mu_k f(x_k) P_n(x_k). \quad (12.13)$$

Величины $\mu_k P_n(x_k)$, $k = 1, 2, \dots, R$, $n = 1, 2, \dots$, вычисляются заранее и закладываются в память.

Чтобы получить значение функции $f(x)$, мы теперь воспользуемся выражением

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x), \quad (12.14)$$

где a_n задаются формулой (12.13). Вычисление $P_n(x)$ в отдельных точках легко проводится с помощью трехчленного рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (12.15)$$

имеющего место для ненормированных полиномов Лежандра.

6. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Посмотрим, как этот метод применяется на практике. Будем минимизировать функцию

$$F_N = \sum_{k=1}^N u_k^2 + \sum_{k=1}^N v_k^2, \quad (12.16)$$

где

$$(a) \quad u_{n+1} = 2u_n - u_n^2 + v_n, \quad u_0 = c, \quad (12.17)$$

(b) v_n выбираются так, чтобы u_{n+1} находилось в интервале $[-1, 1]$.

Обозначим

$$f_N(c) = \min_{\{v\}} F_N \quad (12.18)$$

для $|c| \leq 1$. При $N \geq 2$ мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_1(c) &= c^2, \\ f_N(c) &= \min_v [c^2 + v^2 + f_{N-1}(2c - c^2 + v)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Первые шесть членов этой последовательности были вычислены обычным образом для сетки значений, покрывающей интервал $[-1, 1]$. Затем мы применили метод полиномиальной аппроксимации, записав каждую функцию в виде

$$f_N(c) = \sum_{k=0}^6 a_{k,N} P_k(c), \quad (12.20)$$

где

$$a_{k,N} = \int_{-1}^1 f_N(c) P_k(c) dc = \sum_{j=1}^{14} \mu_j f_N(c_j) P_k(c_j). \quad (12.21)$$

Так как c_j — фиксированные величины, не зависящие от N , последовательность функций $\{f_N(c)\}$ требует вычисления только в точках c_1, c_2, \dots, c_{14} . Однако, чтобы оценить выражение $f_{N-1}(2c - c^2 + v)$, фигурирующее в правой части (12.19), мы должны воспользоваться формулой

$$f_{N-1}(2c - c^2 + v) = \sum_{k=0}^6 a_{k,N} P_k(2c - c^2 + v). \quad (12.22)$$

Для вычисления же величин $P_k(2c - c^2 + v)$ прибегнем

Т а б л и ц а 12.1

c	$f_6^*(c)$	$f_6(c)$
1,0	1,782	1,77
0,8	1,370	1,36
0,2	0,153	0,145
0,0	0,006	0,0
-0,2	0,202	0,20
-0,8	4,876	4,89
-1,0	8,660	8,67

к рекуррентному соотношению (12.15) и затем введем соответствующий нормирующий множитель.

В таблице 12.1 приведено сравнение полученных результатов. Последовательность $\{f_k(c)\}$ получена из (12.19) путем непосредственных вычислений, а $\{f_k^*(c)\}$ получена с помощью (12.19) и полино-

миальной аппроксимации. Как можно видеть, результаты хорошо согласуются.

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В некоторых случаях, когда для получения более эффективного алгоритма, можно использовать аппарат анализа, мы можем комбинировать два метода — метод непрерывной вариации и метод функциональных уравнений.

Рассмотрим задачу максимизации функции

$$f_N = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N) \quad (12.23)$$

при ограничении

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = c, \quad x_i \geq 0. \quad (12.24)$$

Мы имеем функциональное уравнение

$$f_N(c) = \max_{0 \leq x_N \leq c} [g_N(x_N) + f_{N-1}(c - x_N)]. \quad (12.25)$$

Если все рассматриваемые функции дифференцируемы и если мы тем или иным способом определили, что максимизирующая точка лежит внутри интервала $0 \leq x_N \leq c$, то из (12.25) мы получаем два соотношения:

$$\left. \begin{aligned} g'_N(x_N) - f'_{N-1}(c - x_N) &= 0, \\ f_N(c) &= g_N(x_N) + f_{N-1}(c - x_N). \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

Из первого уравнения величина x_N определяется как функция от c . Дифференцируя второе соотношение с учетом этого факта, получаем:

$$f'_N(c) = [g'_N(x_N) - f'_{N-1}(c - x_N)] x'_N(c) + f'_{N-1}(c - x_N) = f'_{N-1}(c - x_N). \quad (12.27)$$

Следовательно, мы имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} g'_N(x_N) &= f'_{N-1}(c - x_N), \\ f'_N(c) &= f'_{N-1}(c - x_N). \end{aligned} \right\} \quad (12.28)$$

Мы видим, что оптимальная политика определяется маргинальными доходами, т. е. последовательностью $\{f'_k(c)\}$.

8. УСТОЙЧИВОСТЬ

Теперь обсудим вопрос, который мы систематически обходили во всем предшествующем изложении. Это — вопрос о точности решения. Рассматривая типичное функциональное уравнение, с которым мы имеем дело, например уравнение (12.25), мы вводим два вида аппроксимации. Сначала заменяем функцию непрерывно меняющейся величины на множество ее значений в точках некоторой дискретной сетки и затем максимизацию по непрерывной области заменяем максимизацией по конечному множеству значений. В некоторых частных случаях исходная задача уже сформулирована таким образом, что никакой аппроксимации не требуется. Однако в общем случае мы должны рассмотреть вопрос о сравнении решения аппроксимирующей задачи с решением исходной задачи. В этом и состоит проблема устойчивости. Изменяя, как мы надеемся, незначительно структуру уравнения, полученного из рассмотрения некоторого конкретного процесса, изменяем ли мы столь же незначительно структуру решения?

Хорошо известно, что на вопросы такого рода трудно ответить даже в классической теории, где первостепенную роль играют линейные уравнения. Несколько работ в этом направлении было сделано в рамках динамического программирования, но и их немного. Мы попытаемся пролить свет на эту проблему с помощью простого сравнения решений некоторых задач вариационного исчисления, полученных точно с помощью аналитического аппарата и численно с помощью метода функциональных уравнений.

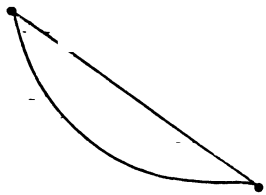


Рис. 91.

9. ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ

В качестве примера рассмотрим одну из первых задач, к которым было применено вариационное исчисление, хотя поставлена она была значительно раньше еще Галилеем. Фактически эта задача стимулировала развитие вариационного аппарата.

Пусть в пространстве даны две точки; мы хотим найти такой путь от верхней точки к нижней, по которому частица, движущаяся под действием силы тяжести без трения, соскаль-

зывает за минимальное время. Легко видеть, что по прямой линии, изображенной на рис. 91, частица пройдет наименьшее расстояние, но с низкой средней скоростью. На криволинейном пути частица быстрее приобретет большую скорость, но пройдет большее расстояние. Сопоставление этих соображений и приводит к решению.

10. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Возьмем исходную точку за начало координат и обозначим конечную точку (\bar{x}, \bar{y}) , как показано на рис. 92.

Тогда, согласно уравнениям механики, частица, пройдя по вертикали расстояние y , приобретет скорость $(2gy)^{1/2}$, независимо от ее горизонтального смещения. Так как длина ds бесконечно малого участка пути дается выражением

$$(1 + y'^2)^{1/2} dx,$$

то время спуска, т. е. интеграл от отношения пройденного пути к скорости, равно

$$t(x, y, y') = \int_0^x \left(\frac{1 + y'^2}{2gy} \right)^{1/2} dx. \quad (12.29)$$

Мы ищем такую функцию $y(x)$, чтобы $y(0) = 0$, $y(\bar{x}) = \bar{y}$ и время t было наименьшим.

11. ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ

Решение задачи должно удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial t}{\partial y'} - \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad (12.30)$$

где t определено выше формулой (12.29).

В данном случае возможно аналитическое решение уравнения (12.30). Это редкое обстоятельство и является причи-

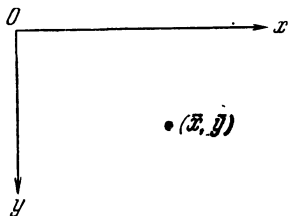


Рис. 92.

ной того, что задача о брахистохроне занимает в изложении вариационного исчисления исключительное положение.

После замены переменной

$$y' = -\operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (12.31)$$

решение принимает вид

$$x - a = b(u + \sin u), \quad y - a = b(1 + \cos u). \quad (12.32)$$

Для граничных точек (0; 0) и (2; 1,8323) постоянные a и b легко определяются и

$$\left. \begin{aligned} x &= \pi + u + \sin u, & y &= 1 + \cos u, \\ -\pi &\leq u \leq -0,5874, & \text{время} &= 0,4501 \text{ сек.} \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Именно это решение, как и решение аналогичной задачи с ненулевой начальной скоростью, мы будем сравнивать с решением, полученным посредством динамического программирования.

12. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Обозначим

$$f(x, y) \text{ — время спуска от точки } (x, y) \text{ до точки } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ по траектории, обеспечивающей наименьшее время.} \quad (12.34)$$

Тогда

$$f(x, y) = \min_{y'} \left[\int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{1+y'^2}{2gy} \right)^{1/2} dx_1 + f(x + \Delta x, y + y' \Delta x) \right]. \quad (12.35)$$

Первое слагаемое правой части (12.35) есть время пересечения вертикальной полосы ширины Δx под углом y' , а второе слагаемое есть оставшееся время для достижения (\bar{x}, \bar{y}) .

Мы предполагаем, что в каждом бесконечно малом интервале движение происходит по прямой линии. Важно отметить, что при использовании более точной аппроксимации легко может быть получен и лучший результат.

Если мы сделаем дополнительное упрощение, предположив, что скорость $(2gy)^{1/2}$ остается постоянной в течение каждого малого интервала, то получим уравнение

$$f(x, y) = \min_{y'} \left[\left(\frac{1 + y'^2}{2gy} \right)^{1/2} \Delta x + f(x + \Delta x, y + y' \Delta x) \right]. \quad (12.36)$$

Обсудим численное решение рекуррентного соотношения.

13. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Разобьем плоскость (x, y) на части посредством сетки с шагом Δx в направлении x и Δy в направлении y , как изображено на рис. 93. Допустимыми путями считаются ломаные с вершинами в узлах сети.

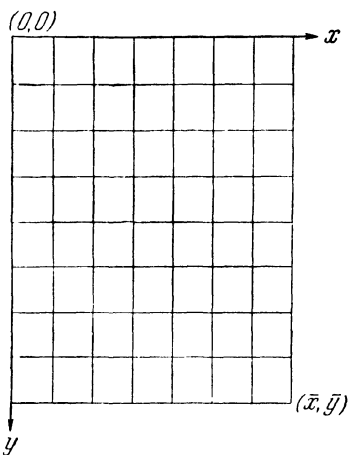


Рис. 93.

Вычислительный процесс состоит из рассмотрения каждого начального значения y для частного значения x и нахождения значений $f(x, y)$ вдоль этой вертикальной линии с помощью рекуррентного соотношения в форме (12.35) или (12.36).

Сделаем следующие упрощающие предположения:

Никакой путь не лежит над прямой линией, соединяющей его начальную и конечную точки. (12.37)

Если, при начале (x, y) , оптимальное значение y при $x + \Delta x$ есть \bar{y} , то при начале (x, y^*) , где y^* лежит ниже y , оптимальное значение y лежит ниже, чем \bar{y} . (12.38)

Если для все более крутых спусков, начинающихся в данной точке, время сначала убывает, а затем начинает возрастать, то предполагается, что минимум найден и никаких дальнейших поисков политики для данной исходной точки не предпринимается. (12.39)

Эти свойства решения могут быть установлены строго, правда с некоторым трудом.

14. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как формулировка, требующая сохранения скорости постоянной и равной начальной на любом интервале, приводит к скорости, равной 0, и, следовательно, бесконечному времени на первом интервале, мы решили в этом случае использовать среднее арифметическое между начальной и конечной скоростями. Такая формулировка названа «случаем А», а случай точного приращения времени (12.2) — «случаем В». Для начальной точки (0; 0) и конечной точки (2; 1,8323) результаты сведены в таблицу 12.2 (точное минимальное время равно 0,4501 сек.).

Т а б л и ц а 12.2

Случай	Δx	Δy	Точность политики	Время прохождения траектории
A	0,25	0,09161	0,5	0,3843
A	0,05	0,01832	0,8	0,3976
A	0,01	0,01832	1,2	0,4395
B	0,25	0,09161	0,05	0,4546
B	0,05	0,01832	0,02	0,4513
B	0,04	0,01221	0,01	0,4511

Заметим, что вследствие того, что начало траектории находится в особой точке, аппроксимация А приводит к большой ошибке в политике и сравнительно малой ошибке во времени. Аппроксимация В дает наилучший желаемый результат для выбранной сетки.

Были произведены вычисления для траектории, исходящей из точки (0; 1,3558) до точки (1; 1,8323) при начальной

Т а б л и ц а 12.3

Случай	Δx	Δy	Точность политики	Время прохождения траектории
A	0,125	0,01832	0,01	0,1092
B	0,125	0,01832	0,01	0,1092

скорости $(2g)^{1/2}$. Такие странные начальная и конечная точки были взяты нами для удобства пользования тригонометрическими таблицами. В этом случае точное время спуска равно 0,1092. Употребляя те же обозначения, что и раньше, получим таблицу 12.3.

Мы видим, что за исключением особой точки $(0,0)$ результат очень хорош.

15. ОДНА ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Чтобы продолжить оценку точности решений динамического программирования и исследовать вопрос о применении лагранжевых множителей, рассмотрим еще одну задачу, которая также решена аналитически.

Мы будем искать кривую заданной длины, связывающую две фиксированные точки, такую, чтобы площадь области между кривой и осью x была минимальна. Будем также требовать, чтобы тангенс угла наклона по абсолютной величине не превосходил 1.

Аналитически мы имеем задачу: Найти

$$\min_{y(x)} \int_{x_0}^{x_1} y dx \quad (12.40)$$

при ограничениях

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} dx &= c, \\ |y'| &\leq 1, \\ y(x_0) &= y_0, \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned} \right\} \quad (12.41)$$

16. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аналитическое решение принадлежит М. Хестенсу. Простота этой задачи дает возможность найти точное решение, хотя задача с ограничениями в общем виде не имеет прямого метода решения.

Можно показать, что оптимальное решение состоит из двух (или нуля) прямолинейных отрезков и дуги окружности.

Для конечных точек $(2\sqrt{2}, 4)$ и $(-2\sqrt{2}, 4)$ при длине $4 + \pi$ решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y &= 4 - 2\sqrt{2} + x, & \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \\ & -2\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2}, \\ y &= 4 - \sqrt{4 - x^2}, & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.42)$$

17. ПОСТАНОВКА В ТЕРМИНАХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Применим метод лагранжевых множителей, введенный в главе II. Затем, определяя «обобщенную площадь» как площадь, сложенную с длиной, умноженной на λ , положим

$$f(x, y, \lambda) \text{ равной минимальной обобщенной площади под кривой, начинающейся в точке } (x, y) \text{ и кончающейся в фиксированной точке } (x_1, y_1). \quad (12.43)$$

Для этой функции имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$f(x, y, \lambda) = \min_{|y'| \leq 1} \left[\int_x^{x + \Delta x} (y + \lambda(1 + y'^2)^{1/2}) dx + \right. \\ \left. + f(x + \Delta x, y + y' \Delta x, \lambda) \right], \quad (12.44)$$

где y' постоянно на всем интервале. Дальнейшее упрощение первого члена в правой части дает:

$$f(x, y, \lambda) = \min_{|y'| \leq 1} \left[\frac{2y + y' \Delta x}{2} + \lambda(1 + y'^2)^{1/2} \Delta x + \right. \\ \left. + f(x + \Delta x, y + y' \Delta x, \lambda) \right]. \quad (12.45)$$

С каждой точкой (x, y) связывается оптимальная (по отношению к данному значению λ) кривая. Обозначив длину дуги этой кривой через $S(x, y, \lambda)$, мы получаем:

$$S(x, y, \lambda) = (1 + y'^2)^{1/2} + S(x + \Delta x, y + y' \Delta x, \lambda). \quad (12.46)$$

18. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА

Будем рассматривать задачу, сформулированную в § 16. Как и в задаче о брахистохроне, разделим все пространство на прямоугольники с помощью некоторой сетки и рассмотрим только кривые, проходящие через узлы сетки. Так как задача симметрична относительно оси y , мы можем ограничиться только рассмотрением интервала $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

Процедура для фиксированного λ состоит в итерировании в обратном направлении до тех пор, пока нам не станет известна $f_0(y) \equiv f(0, y)$, $0 \leq y \leq 4 - 2\sqrt{2}$. Затем определяется минимум $f_0(y)$ по всем y , и минимизирующее значение y служит исходным моментом вычислений для определения политики. Ясно, что именно это значение y было бы равно $y(0)$, если бы мы рассматривали весь интервал $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ *).

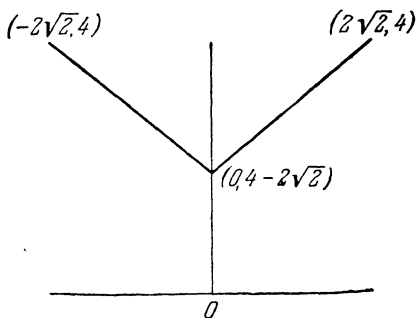


Рис. 94.

Когда $y(0)$ определено, при фиксированном λ , $S_0(y(0)) \equiv S(0, y(0))$ дает нам длину дуги. Если эта длина дуги нас не устраивает, мы выбираем другое λ и повторяем первую фазу вычислений, приводящую нас к другому значению $f_0(y)$, не заботясь об определении оптимальной политики. Это означает, что в процессе итерирования необходимо выбирать λ корректным образом, данные же политики нет необходимости ни запоминать, ни использовать.

Как сказано в § 24 главы II, для определения λ использовалось следующее правило экстраполяции:

$$\lambda = \frac{S - S_0}{S_1 - S_0} (\lambda_1 - \lambda_0) + \lambda_0,$$

где λ_0 и λ_1 — предшествующие значения λ , дающие соответственно длины S_0 и S_1 , а S — желаемая длина.

Так как при выборе $\lambda = 0$ мы не имеем никакого ограничения на длину, в результате получим решение с длиной,

*) В силу симметрии. (Прим. ред.)

равной 8 (рис. 94). Эта информация была использована для вычисления начального значения λ_0 и S_0 . Выбрав λ_1 , мы можем начинать вычисления.

Итак, один цикл вычислений состоит из следующих этапов: 1) задание наугад некоторого разумного значения λ ; 2) направленное назад итерирование уравнения (12.45), 3) одновременная оценка длины через уравнение (12.46), 4) определение y так, чтобы $f_0(y)$ было минимальным, 5) пересчет λ в зависимости от $S_0(y)$.

19. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже выписаны результаты:

	№ 1	№ 2
Δx	0,4	0,03
Δy	0,05	0,01
Начальное значение λ	1,4	1,5
Конечное значение λ	2,034	2,0121
Номер итерации	4	3
Максимальная ошибка в политике	0,03	0,01
Ошибка в площади	0,01	0,01

20. АППРОКСИМАЦИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Во многих случаях удобно аппроксимировать функцию $g(x)$ на интервале $[a, b]$ посредством кусочно-линейной функции

$$g(x) = a_j + b_j(x), \quad u_{j-1} \leq x \leq u_j, \quad j = 1, \dots, N+1, \quad (12.47)$$

где $u_0 = a$, $u_N = b$. Постоянные a_j , b_j и интервалы $[u_{j-1}, u_j]$ удобно вычислять, пользуясь тем условием, что функция

$$F(a_1, a_2, \dots, a_{N+1}; b_1, b_2, \dots, b_{N+1}; u_1, u_2, \dots, u_N) = \\ = \sum_{j=1}^{N+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (g(x) - a_j - b_j x)^2 dx \quad (12.48)$$

достигает минимума. Если действовать прямо, то эта задача минимизации приведет нас к сложной вычислительной проблеме. Динамическое программирование дает нам простой вычислительный алгоритм для вычисления величин a_j , b_j и u_j .

21. ОСНОВНОЕ РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Пусть для фиксированных a и $b \geq a$

$$f_N(b) = \min_{[a_i, b_i, u_i]} E(a_1, \dots, a_N; b_1, \dots, b_N; u_1, \dots, u_n). \quad (12.49)$$

Тогда

$$f_1(b) = \min \left[\int_a^{u_1} (g(x) - a_1 - b_1 x)^2 dx + \right. \\ \left. + \int_{u_1}^b (g(x) - a_2 - b_2 x)^2 dx \right], \quad (12.50)$$

где минимум берется по области $-\infty < a_1, a_2, b_1, b_2 < \infty$, $a \leq u_1 \leq b$. Эта функция вполне определена, так как мы можем сначала вычислить минимум по a_i и b_i , а затем минимизировать по u_1 посредством дискретного поиска.

Легко видеть, что при $N \geq 2$ мы имеем:

$$f_N(b) = \min_{a \leq u_N \leq b} \left[\min_{[a_N, b_N]} \int_{u_N}^b (g(x) - a_N - b_N x)^2 dx + \right. \\ \left. + f_{N-1}(u_N) \right]. \quad (12.51)$$

Это одно из приложений принципа оптимальности. Так как минимум по a_N, b_N может быть найден в явном виде, мы можем переписать (12.51) следующим образом:

$$f_N(b) = \min_{a \leq u_N \leq b} [h(u_N, b) + f_{N-1}(u_N)]. \quad (12.52)$$

Численное решение на этом пути требует нескольких секунд на каждый из N шагов.

22. ОБОБЩЕНИЯ

Требуется очень немного дополнительных усилий, чтобы аппроксимировать $g(x)$ полиномами второй степени или полиномами любой другой фиксированной степени. Аналогично мы можем вычислить минимум

$$\sum_{j=1}^{N+1} \int_{u_{j-1}}^{u_j} (g(x) - h(x, a_j, b_j))^2 dx \quad (12.53)$$

при условии, что мы знаем, как минимизировать функцию

$$\int_{a_N}^b (g(x) - h(x, a_N, b_N))^2 dx \quad (12.54)$$

при a_N и b_N , или минимум

$$\sum_{j=1}^{N+1} \max_{u_{j-1} \leq x \leq u_j} |g(x) - h(x, a_j, b_j)|. \quad (12.55)$$

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЯ

§§ 1—6. Мы следовали статье:

R. Bellman and S. Dreyfus, Functional approximation and dynamic programming, Math. Tables and Other Aids to Computation, vol. 13, 1950, pp. 247—251.

§ 3. По поводу систематического использования полиномиальной аппроксимации для понижения размерности мы отсылаем читателя к статье:

C. W. Merriam, III, An optimization theory for feedback control system design, Information and Control, vol. 3, 1960, pp. 32—59.

В следующих работах можно найти примеры использования изложенного метода в математической физике:

S. Chandrasekhar, Radiative Transfer. Oxford Univ. Press., 1948.

R. Bellman, R. Kalaba and M. Prestrud, Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Plane Parallel Slabs of Finite Thickness (Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 1), Elsevier Publ. Co., New York, 1963.

§ 8. Понятие устойчивости для дифференциальных уравнений исследуется в книге:

R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1954.

Здесь же можно найти много других ссылок. В главе 1 книги «Динамическое программирование» имеется краткое рассмотрение устойчивости решений функциональных уравнений, которой мы касались в настоящей книге.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Изложение современной теории устойчивости дано в книге:
И. Г. Малкин, Устойчивость движения, Гостехиздат, 1952.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ КРИВАЯ

О. Гросс

Рассмотрим вопрос о точках перегиба семейства кривых, определяемых уравнением

$$f(z) = [1 - e^{-\frac{x}{y+z}}]^y + \lambda z, \quad z \geq 0, \quad (1)$$

с параметрами, удовлетворяющими неравенствам $y \geq 1$, $x > 0$, $\lambda > 0$.

1. ЧИСЛО ТОЧЕК ПЕРЕГИБА

Мы утверждаем, что каждая кривая семейства имеет не более одной точки перегиба. Чтобы это доказать, достаточно проверить, что продолженная в область $z > -y$ кривая имеет в точности одну точку перегиба. Проведем такую проверку.

Заметим, что для сформулированного результата присутствие λ в (1) несущественно. Кроме того, поскольку неособенные линейные преобразования сохраняют число точек перегиба, мы можем положить $z = xw - y$. Тогда условие $z > -y$ эквивалентно условию $w > 0$, и задача, таким образом, сводится к определению числа точек перегиба функции

$$\varphi(w) = (1 - e^{-\frac{1}{w}})^y, \quad w > 0. \quad (2)$$

Из (2) получим:

$$\frac{-\varphi'(w)}{y} = (1 - e^{-\frac{1}{w}})^{y-1} e^{-\frac{1}{w}} \frac{1}{w^2}. \quad (3)$$

Теперь точки перегиба кривой (2) соответствуют относительным минимумам и максимумам функции (3). Но так как преобразование $w = 1/u$ является гомеоморфным отображением интервала $(0, \infty)$, причем $dw/du < 0$, то мы видим, что точки перегиба (2) соответствуют относительным внутренним минимумам и максимумам функции

$$X(u) = (1 - e^{-u})^{y-1} e^{-u} u^2, \quad u > 0. \quad (4)$$

Последние в свою очередь содержатся среди положительных корней уравнения $X'(u) = 0$. Теперь, поскольку функция $e^{-u} u^2$ имеет ровно один внутренний локальный максимум ($u = 2$) и не имеет внутренних локальных минимумов, можно предположить, что $y > 1$. Таким образом, из (4) получаем:

$$X'(u) = 2u(1 - e^{-u})^{y-1} e^{-u} - (1 - e^{-u})^{y-1} e^{-u} u^2 + \\ + (y-1)(1 - e^{-u})^{y-2} e^{-2u} u^2 = 0. \quad (5)$$

Так как

$$u(1 - e^{-u})^{y-2} e^{-u} \neq 0,$$

то из (5) следует:

$$2(1 - e^{-u}) - u(1 - e^{-u}) + (y-1)ue^{-u} = 0,$$

или

$$2 - u + e^{-u}(uy - 2) = 0.$$

Теперь, поскольку $y > 1$, значение $u = 2$ не является корнем написанного выше уравнения, и мы получим:

$$e^u = \frac{uy - 2}{u - 2}, \quad 2 \neq u > 0. \quad (6)$$

Так как $e^u > 1$ при $u > 0$ и $(uy - 2)/(u - 2) < 1$ при $0 < u < 2$, то мы видим, что в интервале $(0, 2)$ нет ни одного корня. С другой стороны, e^u строго возрастает до бесконечности, в то время как для $u > 2$ функция $(uy - 2)/(u - 2)$ строго убывает от бесконечности до некоторого конечного значения. Таким образом, видно, что у написанного выше уравнения имеется ровно один положительный корень. Поскольку порядок касания, очевидно, равен нулю, отсюда следует, что этот корень соответствует единственной точке перегиба функции (2), и наше утверждение доказано.

2. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ВЫПУКЛОСТИ

Как видно из (1), член, не содержащий λ , положителен и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Тогда наличие единственной

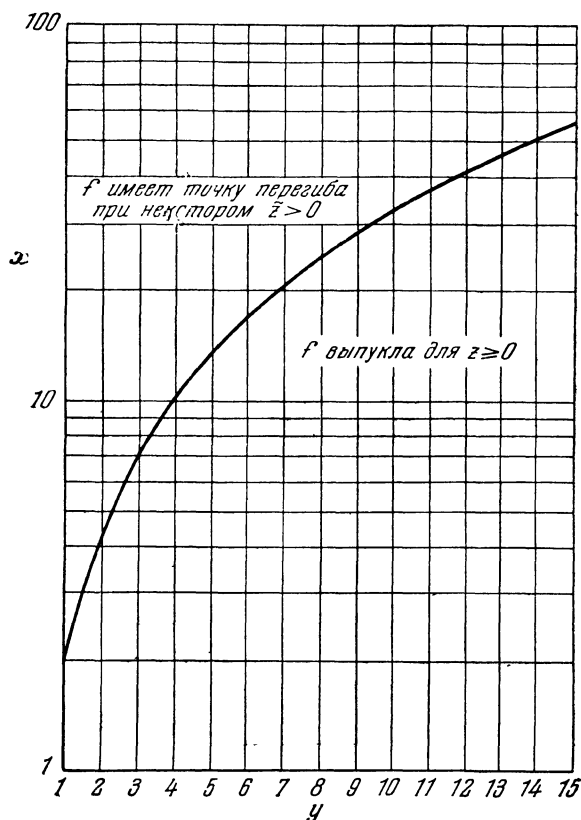


Рис. 95. Область выпуклости функции
 $f(z) = \{[1 - e^{-x(y+z)}]^y + \lambda z\}$, $\lambda > 0$ для $z \geq 0$,
 где параметры удовлетворяют условиям $y \geq 1$, $x > 0$.

точки перегиба на продолженной кривой гарантирует, что f — выпуклая функция. Отсюда следует, что для выпуклости функции f в области $z > 0$ необходимо и достаточно, чтобы

точка перегиба z на продолженной кривой удовлетворяла условию $z \leq 0$, т. е., согласно преобразованиям § 1, $xw - y \leq 0$ или $x/u - y \leq 0$, где в силу (6)

$$e^u = \frac{uy - 2}{u - 2}.$$

Разрешая это последнее уравнение относительно y , получим:

$$y = e^u + \frac{2}{u} (1 - e^u) = F(u). \quad (7)$$

Теперь, замечая, что правая часть (6) есть строго возрастающая функция от y при $u > 2$ и что e^u строго возрастает, мы заключаем, что корень u является строго возрастающей функцией от y ; таким образом, необходимым и достаточным условием того, что $x/u - y \leq 0$, т. е. $u \geq x/y$, является условие $y \geq F(x/y)$. Иными словами,

$$y \geq e^{x/y} + \frac{2y}{x} (1 - e^{x/y}).$$

Граничную кривую $y = F(x/y)$ можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= tF(t), \\ y &= F(t), \quad t \geq 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F(t) = e^t + \frac{2}{t} (1 - e^t).$$

Таким образом, мы получаем на плоскости (x, y) область, в которой f выпукла, как это показано на рис. 95.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. Дрейфус и М. Фреймер

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем приложении будет развит аппарат, позволяющий включить задачу математического программирования в более общую задачу, в которой оптимальный доход рассматривается как функция имеющихся ресурсов. Эта функция оптимального дохода является центральной для нашего метода. Простая характеристика ее свойств непосредственно и интуитивно приводит к теории двойственности линейного программирования, а также к результатам Куна—Таккера [1] по квадратичному программированию. Кроме того, этот подход дает непосредственную экономическую интерпретацию рассматриваемых величин.

2. ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В задаче линейного программирования требуется найти вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

доставляющий максимум линейной целевой функции

$$c^T x \quad (2)$$

при ограничениях в виде неравенств

$$Ax \leq b \quad (3)$$

и

$$x \geq 0, \quad (4)$$

где

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6)$$

и

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (7)$$

заданы.

Пусть $f(b)$ — максимальное значение целевой функции (2), как функции от правой части ограничения (3). Если x^0 — оптимальное решение задачи, то

$$f(b) = c^T x^0. \quad (8)$$

Для того чтобы изучить поведение функции f , рассмотрим одну из компонент x_j^0 оптимального решения. Если мы

увеличим x_j^0 на ε , то в силу наложенного ограничения мы должны заменить правую часть (3) на $b + \varepsilon A^{(j)}$, где

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (9)$$

— j -й столбец матрицы A . Таким образом, мы приходем к рассмотрению величины $f(b + \varepsilon A^{(j)})$, представляющей собой максимальное значение функции $c^T y$ при ограничениях

$$Ay \leq b + \varepsilon A^{(j)} \quad (10)$$

и

$$y \geq 0. \quad (11)$$

Так как вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_j^0 + \varepsilon \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = x^0 + \varepsilon e^j, \quad (12)$$

где e^j — j -й единичный вектор, удовлетворяет неравенствам (10) и (11), а доход при этом равен

$$c'(x^0 + \varepsilon e^j) = f(b) + \varepsilon c_j, \quad (13)$$

мы видим, что для всех j при $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$f(b + \varepsilon A^{(j)}) \geq f(b) + \varepsilon c_j. \quad (14)$$

Разлагая *) левую часть в ряд по степеням ε , получим **):

$$f(b) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} + \text{+ члены более высокого порядка} \geq f(b) + \varepsilon c_j. \quad (15)$$

Взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, мы видим, что для всех j

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \geq c_j. \quad (16)$$

Предположим теперь, что $x_j^0 > 0$. Тогда в приведенных выше рассуждениях можно допустить отрицательное значение для ε , при условии, что оно достаточно близко к нулю (так что y , определяемое формулой (12), удовлетворяет неравенству (11)). Но, поскольку $\varepsilon < 0$, мы заключаем из (15), что

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \leq c_j, \text{ если } x_j^0 > 0. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = c_j, \text{ если } x_j^0 > 0. \quad (18)$$

Наконец, мы видим, что

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} \geq 0 \text{ для всех } i. \quad (19)$$

Для сформулированной выше задачи это вытекает из того факта, что изменение задачи, связанное с увеличением вели-

*) Могут найтись некоторые значения b , для которых это разложение невозможно. Эту трудность можно обойти простым приемом, выбрав подходящее b , бесконечно близкое к заданному. Мы не приводим здесь соответствующей процедуры, поскольку она ничего не добавит к пониманию нашего подхода к двойственности.

**) Нетрудно показать (хотя бы методом параметрического программирования), что $f(b)$ является выпуклой кусочно-линейной функцией, поэтому разложение (15) либо не содержит членов высшего порядка малости, либо невозможно (в отдельных точках). (Прим. ред.)

чины b_i (которая обычно мыслится как наличное количество некоторого ресурса), не может привести к ухудшению оптимального решения по сравнению с исходным решением, но может дать улучшение первоначального значения целевой функции.

Неравенства (16) и (19) приводят к рассмотрению векторов

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad (20)$$

удовлетворяющих неравенствам

$$u^T A \geq c^T \quad (21)$$

и

$$u \geq 0. \quad (22)$$

Из неравенств (3), (4), (21) и (22) получим:

$$c^T x \leq (u^T A) x = u^T (Ax) \leq u^T b \quad (23)$$

для любых x и u , удовлетворяющих (3), (4), (21) и (22). В частности, если взять x^0 и u^0 , где

$$u_i^0 = \frac{\partial f}{\partial b_i}, \quad (24)$$

то два неравенства в (23) переходят в равенства. Ибо из уравнения (18) мы имеем, что или $x_j^0 = 0$, или $c_j = \sum_{i=1}^m u_i^0 a_{ij}$ (или же и то и другое), тогда как из самого определения функции f следует, что если $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 < b_i$, то $u_i^0 = 0$.

(Это последнее утверждение следует из того факта, что если некоторый вид ресурсов не используется целиком, то незначительное изменение его запаса не изменит оптимального дохода.)

Итак, мы показали, что

$$c^T x \leq c^T x^0 = u^{0T} b \leq u^T b \quad (25)$$

для всех x и u , удовлетворяющих ограничениям (3), (4), (21) и (22). Таким образом мы получили *двойственную задачу*: минимизировать $u^T b$ при ограничениях (21) и (22).

Мы ввели обозначения u_i для $\frac{\partial f}{\partial b_i}$, чтобы перейти к стандартной терминологии. Смысл введенной величины $\frac{\partial f}{\partial b_i}$ оче-

виден и используется всюду в выводах. При обычных выводах двойственности u вводят как множитель Лагранжа, а затем после формальных преобразований, направленных на получение двойственных результатов, замечают, что u имеет экономический смысл.

Интересно отметить, как конкретная формулировка задачи влияет на наши заключения. Если бы неравенство в ограничениях (3) было бы обратным, тогда наше заключение (19) о знаке двойственной переменной было бы обратным. Равенство в (3) ничего не говорило бы о знаке двойственных переменных. (Так как все ресурсы i погреблялись бы при любом допустимом плане, то возрастание b_i могло бы иметь результатом возрастание или убывание дохода.) Переход от задачи максимизации линейной формы к задаче минимизации сделал бы обратным смысл неравенств в уравнениях (14)

Т а б л и ц а I

Прямая задача	Целевая функция $c^T x$	max	min	max	min	max	max
	Ограничения Ax	$\leq b$	$\leq b$	$\geq b$	$\geq b$	$\leq b$	$= b$
	Переменные x	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	неогранич.	≥ 0
Двойственная задача	Целевая функция $b^T u$	min	max	min	max	min	min
	Ограничения $A^T u$	$\geq c$	$\leq c$	$\geq c$	$\leq c$	$= c$	$\geq c$
	Переменные u	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0	≥ 0	неогранич.

(15), (16), (17) и (25), а также заключения, основанные на этом. В этом случае, конечно, можно было бы определить $f(b)$ как минимальное достижимое значение целевой функции.

В таблице I даны некоторые прямые и соответствующие двойственные задачи. Читатель может легко проверить эти результаты на основе изложенного выше.

3. УРАВНЕНИЯ КУНА—ТАККЕРА: КВАДРАТИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Задача квадратичного программирования заключается в выборе вектора x таким образом, чтобы максимизировать квадратичную целевую функцию

$$p^T x - \frac{1}{2} x^T C x \quad (26)$$

при ограничениях (3) и (4). Здесь x , A и b — такие же, как в § 2, а компоненты

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

и

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad (28)$$

заданы. Кроме того, матрица C предполагается положительно определенной.

Пусть $f(b)$ — максимальное значение целевой функции. Если x^0 — оптимальное решение, то

$$f(b) = p^T x^0 - \frac{1}{2} x^{0T} C x^0. \quad (29)$$

Рассмотрим снова функцию $f(b + \varepsilon A^{(j)})$, являющуюся теперь максимальным значением функции $p^T u - \frac{1}{2} u^T C u$ при

ограничениях (10) и (11). Как и прежде, $y = x^0 + \varepsilon e^j$ удовлетворяет (10) и (11), что теперь приводит к доходу

$$\begin{aligned} p^T (x^0 + \varepsilon e^j) - \frac{1}{2} (x^0 + \varepsilon e^j)^T C (x^0 + \varepsilon e^j) = \\ = f(b) + \varepsilon \left(p_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 c_{jj}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом,

$$f(b + \varepsilon A^{(j)}) \geq f(b) + \varepsilon \left(p_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 c_{jj}. \quad (31)$$

Разложив левую часть в ряд по степеням ε , получим для всех j и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} f(b) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_k} a_{ij} a_{kj} + \\ + \text{члены более высокого порядка} \geq f(b) + \\ + \varepsilon \left(p_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 c_{jj}. \end{aligned} \quad (32)$$

Взяв ε достаточно малым, мы видим, что при всех j

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \geq p_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i^0, \quad (33)$$

или, в векторных обозначениях,

$$A^T u^0 \geq p - Cx^0. \quad (34)$$

Предположим теперь, что $x_j^0 > 0$. Тогда в приведенном выше рассуждении можно допустить отрицательные значения для ε ; при этом получится обратное по отношению к (33) неравенство. Отсюда и из (33) имеем:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = p_j - \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i^0, \text{ если } x_j^0 > 0. \quad (35)$$

Чтобы превратить (33) в равенство при всех j , введем вектор

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad (36)$$

определяемый уравнением

$$A^T u^0 = p - c x^0 + v. \quad (37)$$

Тогда ясно, что

$$v \geq 0 \quad (38)$$

и что

$$v_j = 0, \text{ если } x_j^0 > 0. \quad (39)$$

Как и в § 2, из определения функции f следует неравенство

$$u^0 \geq 0. \quad (40)$$

Уравнения (37), (38), (39) и (40) представляют собой условия оптимальности Куна—Таккера для сформулированной выше задачи квадратичного программирования.

Из уравнений (32) и (35) находим неравенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_k} a_{ij} a_{kj} \geq c_{jj}, \text{ если } x_j^0 > 0, \quad (41)$$

интерпретацию которого мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

4. УРАВНЕНИЯ КУНА — ТАККЕРА: ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что требуется максимизировать произвольную функцию $\varphi(x)$ при ограничениях (3) и (4). Определяя $f(b)$ как максимальное значение целевой функции, а x^0 как оптимальное решение и применяя обычные рассуждения, получим:

$$f(b + \varepsilon A^{(j)}) \geq \varphi(x^0 + \varepsilon e^j), \quad \varepsilon > 0, \quad j \text{ — любое}, \quad (42)$$

$$f(b + \varepsilon A^{(j)}) \geq \varphi(x^0 + \varepsilon e^j), \quad \varepsilon < 0, \quad x_j^0 > 0. \quad (43)$$

Поскольку разложения для f и φ имеют вид

$$f(b + \varepsilon A^{(j)}) = f(b) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_k} a_{ij} a_{kj} + \dots, \quad (44)$$

$$\varphi(x^0 + \varepsilon e^j) = \varphi(x^0) + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} + \dots \quad (45)$$

и

$$\varphi(x^0) = f(b), \quad (46)$$

мы заключаем (как в § 3), что

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \geq \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad \text{для всех } j, \quad (47)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \quad \text{если } x_j^0 > 0, \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial b_i \partial b_k} a_{ij} a_{kj} \geq \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}, \quad \text{если } x_j^0 > 0. \quad (49)$$

Если заменить $\frac{\partial f}{\partial b_i}$ в уравнениях (47) и (48) на u_i , то мы получим условия оптимальности Куна — Таккера для сформулированной выше общей задачи математического программирования.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proc. Second Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, 1951, pp. 481—492.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- С. Г а с с, Линейное программирование, М., Физматгиз, 1961.
 С. К а р л и н, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., Изд-во «Мир», 1964.
 К. Дж. Э р р о у, Л. Г у р в и ц, Х. У д з а в а, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962.
 Линейные неравенства и смежные вопросы, М., ИЛ, 1959.
 Дж. Д е н н и с, Математическое программирование и электрические цепи, М., ИЛ, 1960.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЛИТИК

С. Дрейфус

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем приложении мы хотим дать элементы теории численного решения задач оптимизации, весьма перспективной в отношении преодоления трудностей, связанных с размерностью. Этот метод, по существу, является градиентным методом, в котором приближение к оптимальной политике осуществляется последовательными шагами. При построении метода мы пользуемся известными понятиями и аппаратом динамического программирования. Эти результаты были также получены Брайсоном и Келли [1], [2] более сложным путем. Брайсон получил этим методом численные решения вариационных задач, содержащих до восьми параметров состояния; представляется, что общность метода практически ничем не ограничена.

Недостатки этого метода уничтожения оков размерности двойки. Во-первых, процесс приближений может сходиться к экстремали, которая не дает абсолютного минимума или максимума. А потому для задач с небольшой размерностью большое преимущество на стороне обычного метода, изложенного на предшествующих страницах этой книги. Однако в случае задач с высокой размерностью простота и

практичность метода компенсируют опасность локальной оптимальности. Во-вторых, ограничения в виде неравенств на параметры состояния и решения порождают серьезные трудности. Указанные недостатки можно до некоторой степени принять во внимание при последовательных приближениях, но этого нельзя сделать каким-либо из известных способов. Напомним, что в обычных алгоритмах динамического программирования ограничения просто выделяют некоторую область в пространстве решений, в которой должно быть найдено решение, и потому они скорее желательны, чем неудобны.

2. ЗАДАЧА

В настоящем приложении мы ограничимся дискретным аналогом вариационной задачи, известной под названием «задачи Майера» (см. § 22 главы V). Это не умаляет общности, так как, во-первых, любая вариационная задача может быть сведена к задаче Майера и, во-вторых, для численного решения на счетной машине непрерывной вариационной задачи необходима дискретизация. Кроме того, читатель, вероятно, представляет себе теперь, что почти все задачи динамического программирования можно рассматривать как вариационные задачи и наоборот.

Нашу задачу можно поставить следующим образом. Мы хотим минимизировать функцию φ от параметров состояния y_1, \dots, y_n и времени t в некоторый неопределенный момент T в будущем, где T — первый момент, когда выполняется некоторое «правило остановки»

$$\psi(y_1, \dots, y_n, t) = 0. \quad (1)$$

Величины y_i определяются своими начальными значениями

$$y_{10}, \dots, y_{n0} \quad (2)$$

и разностными уравнениями

$$y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + g_i(y_1(t), \dots, y_n(t), z(t), t) \Delta t, \quad (3)$$

где $z(t)$ — решение, которое должно быть выбрано оптимальным образом.

Иначе говоря, мы хотим выбрать такую последовательность чисел $\{z_k\}$, где $z_k = z(k\Delta t)$, что, когда параметры состояния y_i меняются во времени, условие остановки $\psi = 0$ выполняется при минимальном φ .

Задачи на нахождение минимального времени можно рассматривать как частные случаи этой общей задачи, когда $\varphi = t$. Обратно, если требуется, чтобы конечным моментом был в точности момент T_F , то условием остановки будет

$$\psi = t - T_F = 0. \quad (4)$$

Чтобы избежать рассмотрения t как **особой переменной**, положим $y_{n+1} = t$ и $g_{n+1} = 1$.

3. РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Начнем с выбора наугад заведомо неоптимальной последовательности решений $(z_0, z_1, \dots, z_k, \dots)$, где $z_k = z(k\Delta t)$, и рассчитаем кривую, порожденную этими решениями вместе с уравнениями (3) и условиями (2).

Определим неоптимальную функцию дохода как функцию

$$f(y_1, \dots, y_{n+1}), \text{ равную значению } \varphi \text{ при условии остановки } \psi = 0, \text{ при начальном состоянии, характеризующемся } y_1, \dots, y_{n+1} \text{ и использовании угаданной политики } \{z_k\}. \quad (5)$$

Очевидно, что функция f удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$f(y_1, \dots, y_{n+1}) = f(y_1 + g_1 \Delta t, \dots, y_{n+1} + g_{n+1} \Delta t), \quad (6)$$

где g_i вычислены с помощью угаданных $\{z_k\}$ и соответствующей им траектории.

Для того чтобы рассчитать эффект первого порядка от изменения в решении в момент t , мы пытаемся найти $\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_t$, т. е. вычислить производную $\partial f / \partial z$ как функцию параметров состояния и решений в момент t .

Взяв частную производную от (6) по z , получим:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_t = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_{t+\Delta t} \right) \left(\left. \frac{\partial g_i}{\partial z} \right|_t \right) \right\} \Delta t. \quad (7)$$

Как видно, чтобы вычислить это выражение, нужно знать $\left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_{t+\Delta t}$. Рекуррентное соотношение для этой величины

получается взятием частной производной от (6) по y_j

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|_t = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y_i} \right|_{t+\Delta t} \right) \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_t \Delta t \right\} + \left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|_{t+\Delta t},$$

$$j = 1, \dots, n+1. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) имеют очевидное словесное толкование. Уравнение (7) выражает тот факт, что скорость изменения функции f относительно z в момент t равна произведению скоростей изменения в момент $t + \Delta t$ состояния системы, вызванного изменением z , и изменения функции f , обусловленного изменением состояния системы в момент $t + \Delta t$. Уравнение (8) гласит, что полное изменение функции f есть сумма двух слагаемых, которые выражают соответственно изменение f , обусловленное изменением y_j , входящих в g_i , и изменение f , вызванное прямым изменением $y_j(t)$ относительно $y_j(t + \Delta t)$. Как видно, уравнение (8) является дискретным аналогом правила множителей*)

$$\frac{d}{dt} f_{y_j} + \sum_{i=1}^{n+1} f_{y_i} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = 0, \quad (9)$$

полученного в § 22 главы V (уравнение (5.97)). Если $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$, то никакого улучшения быть не может и имеющаяся кривая является оптимальной. Это замечание приводит к уравнению (5.93) § 22 главы V.

Теперь мы имеем два обычных рекуррентных соотношения (7) и (8), которые дают возможность в любой момент оценить эффект от изменения z в конечной целевой функции φ . Граничные условия для рекуррентных соотношений мы определяем из того обстоятельства, что изменение в параметре состояния в конечный момент T вызывает два эффекта: непосредственное изменение φ и изменение φ , обусловленное изменением в конечном моменте, определяемом уравнением $\dot{\varphi} = 0$. Учитывая это, имеем:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y_j} \right|_T = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right|_T - \left(\left. \frac{\dot{\varphi}}{\dot{y}} \right|_T \right) \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \right|_T \right), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (10)$$

*) По терминологии Л. С. Понтрягина эти уравнения являются дискретным аналогом уравнений для импульсов. (Прим. ред.)

С помощью двух элементарных операций взятия производной мы получили выражения для вычисления в любой момент эффекта первого порядка в конечном значении функции φ , вызванного изменением в решении. Эти результаты можно осмысливать как «функции влияния» или сопряженные уравнения, которые обычно получаются из теорем о представлении решений линейных дифференциальных уравнений.

Выбор метода, с помощью которого их можно использовать наиболее эффективным образом для последовательного улучшения неоптимального решения, является в значительной мере вопросом эксперимента в области численного анализа. В следующем параграфе будет дан один, по-видимому, весьма эффективный способ использования этих результатов, принадлежащий Брайсону.

4. СПОСОБЫ УЛУЧШЕНИЯ

Постулируем для корректировки z правило

$$z_{\text{новое}}(t) = z_{\text{старое}}(t) + \delta z(t) \quad (11)$$

и будем искать выражение для δz . Начинаем с принятия разумной политики, заключающейся в изменении z в каждый момент t пропорционально величине

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z},$$

вычисляемой для момента t . Это означает, что там, где потенциальный уровень дохода $\partial f / \partial z$ больше, мы действуем более решительно. Обозначив

$$\delta z = k \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z}, \quad (12)$$

мы заключаем из (7), что

$$\Delta \varphi = \sum_{t=0}^T \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = k \sum_{t=0}^T \left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z} \right)^2 \Delta t, \quad (13)$$

где $\Delta\varphi$ есть изменение в конечном значении φ , обусловленное изменениями $z(t)$ через $\delta z(t)$ во все моменты $0 \leq t \leq T$. Слагаемые в выражении для $\Delta\varphi$ легко вычисляются вдоль заданной траектории с помощью рекуррентных соотношений (7) и (8).

Если мы хотим внести поправку $\overline{\Delta\varphi}$ в значение φ , то мы выбираем

$$k = \frac{\overline{\Delta\varphi}}{\sum_{t=0}^T \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z} \right)^2 \Delta t} \quad (14)$$

и используем при следующей итерации новую функцию решения, задаваемую формулой

$$z_{\text{новое}}(t) = z_{\text{старое}}(t) + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z} \right) \overline{\Delta\varphi}}{\sum_{t=0}^T \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z} \right)^2 \Delta t}. \quad (15)$$

Разумно при каждой последовательной итерации искать лишь небольшие улучшения $\overline{\Delta\varphi}$, поскольку нами проводится анализ эффекта первого порядка, а он точен только для малых изменений.

Прежде чем приступить к изложению аппарата последовательного улучшения для более сложных задач, введем некоторые обозначения и перечислим основные результаты. Вместо $\partial f / \partial y_i$ будем писать $\lambda_{y_i}(\varphi)$, помня, что $\lambda_{y_i}(\varphi)$ можно интерпретировать как влияние изменения в y_i на значение φ в конечный момент. Сумму $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g_i}{\partial z}$ будем обозначать $\lambda_z(\varphi)$.

В этих обозначениях метод последовательного улучшения состоит в следующем:

- (1) Угадывается $z(t)$.
- (2) Интегрируются уравнения движения (3).
- (3) Вычисляются $\lambda_{y_i}(\varphi)$ в конечный момент T по формуле (10).

(4) Определяются $\lambda_{y_i}(\varphi)$ вдоль исходной траектории посредством (8), и одновременно вычисляются $\lambda_z(\varphi)$ и $\sum_t (\lambda_z(\varphi))^2 \Delta t$ по формуле (7).

(5) По формуле (15) определяется $z_{\text{новое}}$ для фиксированного $\bar{\Delta\varphi}$.

(6) Возвращаются к шагу (2).

Предположим теперь, что в момент остановки должно выполняться дополнительное соотношение

$$\theta(y_1, \dots, y_n, t) = 0. \quad (16)$$

Такие же рассуждения, как в предыдущих параграфах, дают возможность рассчитать влияние изменения в z на конечное значение θ с помощью формул

$$\lambda_{y_j}(\theta) \Big|_t = \left(\sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_{y_i}(\theta) \Big|_{t+\Delta t} \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} \Big|_t \right) \right) \Delta t + \lambda_{y_j}(\theta) \Big|_{t+\Delta t}, \quad (17)$$

$$\lambda_z(\theta) \Big|_t = \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda_{y_i}(\theta) \Big|_{t+\Delta t} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z} \Big|_t \right), \quad (18)$$

$$\lambda_{y_j}(\theta) \Big|_T = \frac{\partial \theta}{\partial y_j} \Big|_T - \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}} \Big|_T \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \Big|_T. \quad (19)$$

Пусть теперь δz имеет вид

$$\delta z = k_1 \dot{\lambda}_z(\varphi) + k_2 \lambda_z(\theta), \quad (20)$$

тогда

$$\Delta\varphi = \sum_{t=0}^T \lambda_z(\theta) \Delta t \delta z, \quad (21)$$

$$\Delta\theta = \sum_{t=0}^T \lambda_z(\theta) \Delta t \delta z. \quad (22)$$

Если исходная траектория из-за ошибок округления, нелинейности или же трудностей нахождения начальной допустимой траектории не удовлетворяет вспомогательному условию (16), то мы выбираем $\bar{\Delta\theta}$ как взятое со знаком минус отклонение от желаемого условия на конце. Если исходная траектория допустима, $\bar{\Delta\theta}$ берется равной нулю.

Решим теперь систему линейных уравнений

$$\overline{\Delta\varphi} = \left[\sum_{t=0}^T \lambda_z(\varphi)^2 \right] k_1 \Delta t + \left[\sum_{t=0}^T \lambda_z(\varphi) \lambda_z(\theta) \right] k_2 \Delta t, \quad (23)$$

$$\overline{\Delta\theta} = \left[\sum_{t=0}^T \lambda_z(\varphi) \lambda_z(\theta) \right] k_1 \Delta t + \left[\sum_{t=0}^T \lambda_z(\theta)^2 \right] k_2 \Delta t \quad (24)$$

относительно k_1 и k_2 , которые следует использовать в уравнении (20) для улучшения $\overline{\Delta\varphi}$ в целевой функции и поправки $\overline{\Delta\theta}$ в конечном значении дополнительного условия.

Указанный способ можно использовать для включения любого разумного числа дополнительных конечных условий.

В неопубликованной работе Брайсона приведенный выше метод обобщен таким образом, что можно требовать максимального улучшения целевой функции при заданном фиксированном значении суммы

$$\sum_{t=0}^T (\delta z)^2, \quad (25)$$

а также развиты методы, которые предохраняют нас от требования несовместимых изменений в целевой функции и дополнительных условиях. Однако этот анализ лежит за пределами настоящей книги.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. A. E. Bryson, F. J. Carroll, W. F. Denham and Mikami, Determination of the lift program that minimizes re-entry heating with acceleration or range constraints using a steepest descent computation procedure, J. Inst. Aerospace Sciences.
2. H. J. Kelley, Gradient theory of optimal flight paths, ARS Journal, vol. 30, no. 10, October 1960.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

О НОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ В АНАЛИЗЕ: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАКСИМУМА

Р. Беллман и В. Каруш

1. ВВЕДЕНИЕ

В главе I мы видели, как часто в математической экономике и исследовании операций сталкиваются с задачей определения максимума функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_N(x_N) \quad (1)$$

в области R , определяемой соотношениями

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = x, \quad x_i \geq 0.$$

При различных допущениях относительно f_i эта задача может быть исследована аналитически (см. Каруш [1], [2]); аналитически она может быть рассмотрена также с помощью теории динамического программирования [5] и, конечно, вычислительным путем, как это было сделано выше.

В связи с решением этой задачи естественно ввести понятие «свертки» двух функций f и g , $h = f * g$, определяемой равенством

$$h(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [f(y) + g(x - y)]. \quad (2)$$

Для более общего исследования удобнее ввести вместо этого свертку $h = f \otimes g$, определяемую равенством

$$h(x) = \max_{0 \leq y \leq x} [f(y)g(x-y)]. \quad (3)$$

Легко видеть, что операция \otimes коммутативна и ассоциативна при условии, что все входящие в нее функции неотрицательны. По аналогии с соотношением между преобразованием Лапласа и обычной сверткой,

$$f(y) * g(x) = \int_0^x f(y)g(x-y)dy,$$

естественно искать функциональное преобразование

$$M(f) = F, \quad (4)$$

обладающее свойством

$$M(f \otimes g) = M(f)M(g), \quad (5)$$

т. е.

$$H(z) = F(z)G(z), \quad (6)$$

где H, F, G представляют собой соответственно преобразования функций h, f, g .

Мы покажем, что преобразование M существует и имеет очень простой вид. Вдобавок, в ряде случаев M^{-1} имеет весьма простое и изящное представление.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАКСИМУМА

Пусть преобразование (4) определяется уравнением

$$F(z) = \max_{x \geq 0} [e^{-xz} f(x)], \quad z \geq 0. \quad (7)$$

Будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна и неотрицательна при $x \geq 0$. Кроме того, так как $F(z)$ не изменится, если f заменить на ее монотонную огибающую, то мы будем рассматривать (7) только для монотонных неубывающих функций f .

Докажем теперь (5) прямым методом, используемым при обычной свертке. Имеем:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \max_{x \geq 0} [e^{-xz} \max_{0 \leq y \leq x} [f(y) g(x-y)]] = \\
 &= \max_{x \geq 0} \max_{0 \leq y \leq x} [e^{-xz} f(y) g(x-y)] = \max_{y \geq 0} \max_{x \geq y} [] = \\
 &= \max_{y \geq 0} [f(y) \max_{x \geq y} [e^{-xz} g(x-y)]] = \\
 &= \max_{y \geq 0} [e^{-yz} f(y) \max_{w \geq 0} [e^{-wz} g(w)]] = \\
 &= \max_{y \geq 0} [e^{-yz} f(y)] \max_{w \geq 0} [e^{-wz} g(w)] = F(z) G(z), \quad (8)
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы гарантировать существование преобразования $F = M(f)$ для $z > 0$, достаточно предполагать, что f удовлетворяет соотношению вида $f(x) = o[x^c]$ для $x \geq 0$, где $c \geq 0$. Преобразование F является убывающей функцией, непрерывной для $z > 0$; если $c = 0$, то это остается в силе и для $z \geq 0$.

3. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

Определение существования и единственности M^{-1} представляет некоторые трудности, и сейчас мы рассмотрим только частные случаи. Если для $z > 0$ максимум функции $f(x) e^{-xz}$ можно найти с помощью дифференцирования, то мы найдем максимизирующее значение из уравнения $f'(x) - zf(x) = 0$. Допустим, что это уравнение имеет единственное решение $x = x(z)$ и $dx/dz \neq 0$ (и, следовательно, < 0). Для этого значения x мы имеем $F(z) = e^{-xz} f(x)$. Дифференцируя это соотношение по x , получаем:

$$\begin{aligned}
 F'(z) \frac{dz}{dx} &= (f'(x) - zf(x)) e^{-xz} - xf(x) e^{-xz} \frac{dz}{dx} = \\
 &= -xf(x) e^{-xz} \frac{dz}{dx}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Значит,

$$x = -F'(z)/F(z) \text{ или } F'(z) + xF(z) = 0. \quad (10)$$

Но это в точности совпадает с соотношением, которое дает значение z , минимизирующее функцию $F(z)e^{xz}$ при фиксированном x . Следовательно, мы имеем требуемую формулу обращения

$$f(x) = \min_{z \geq 0} e^{xz} F(z). \quad (11)$$

Более простым путем получения этого соотношения является следующий. По формуле (7) мы имеем для $x \geq 0$

$$F(z) \geq e^{-xz} f(x), \quad (12)$$

откуда $F(z)e^{xz} \geq f(x)$. Если имеет место взаимно однозначное соответствие между значениями x и z , то мы имеем неравенство $\min_{z \geq 0} F(z)e^{xz} \geq f(x)$, при этом для одного значения достигается равенство, откуда следует (11).

4. ПРИМЕНЕНИЕ

Пусть

$$f(x) = \max_R [f_1(x_1) f_2(x_1) \dots f_N(x_N)], \quad (13)$$

где область R — такая же, как в (1). Тогда по индукции

$$M(f) = \prod_{i=1}^N M(f_i) \text{ или } F(z) = \prod_{i=1}^N F_i(z), \quad (14)$$

откуда формально следует:

$$f(x) = \min_{z \geq 0} \left[e^{xz} \prod_{i=1}^N F_i(z) \right]. \quad (15)$$

Аналогично, если имеется уравнение «восстановления»

$$f(x) = a(x) + \max_{0 \leq y \leq x} [f(y) g(x-y)], \quad (16)$$

то мы имеем формальное решение

$$f(x) = \min_{z \geq 0} \left[\frac{e^{xz} A(z)}{1 - G(z)} \right], \quad (17)$$

где $A = M(a)$, $G = M(g)$.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. W. Karush, A queuing model for an inventory problem, Operations Research, vol. 5, 1957, pp. 693 — 703.
 2. W. Karush, A General Algorithm for the Optimal Distribution of Effort, Manag. Sci., vol. 9, No 1, 1962, pp. 50—72.
 3. R. Bellman and W. Karush, On a new functional transform in analysis: the Maximum Transform, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 67, 1961, pp. 501 — 503.
 4. R. Bellman and W. Karush, Mathematical Programming and the Maximum Transform, J. Soc. Industr. Appl. Math., vol. 10, No 3, 1962, 550 — 567.
 5. R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
-

ПРИЛОЖЕНИЕ V

СЧЕТНАЯ МАШИНА RAND-ДЖОННИАК

С. Дрейфус

Большая часть вычислений, приведенных в настоящей книге, выполнена на вычислительной машине Джонниак корпорации RAND. Поскольку в тексте книги иногда делаются ссылки на время вычислений и другие данные, свойственные этой конкретной машине, мы перечислим вкратце основные характеристики машины Джонниак, какой она была в момент наших исследований по динамическому программированию.

Машина, сконструированная по Принстонскому проекту и названная в честь Джона фон Неймана, имела магнитное оперативное запоминающее устройство на сердечниках в 4000 ячеек, магнитный барабан емкостью в 12 000 чисел и не имела магнитной ленты. Ввод осуществлялся с помощью перфокарт, а вывод — через перфоратор по 900 строк в минуту. Каждая ячейка памяти хранила 40 двоичных знаков и содержала или числовые данные, или две одноадресные команды. Сложение с фиксированной запятой двух чисел требовало около 0,000080 секунды, а на умножение или деление расходовалось до 0,001500 секунды. Операция с плавающей запятой получалась с помощью интерпретирующей программы, и при этом вычисления замедлялись примерно в десять раз.

В целом характеристики Джонниак были сравнимы с ее современником — вычислительной машиной IBM-701.

Для грубого перевода машинного времени, упоминаемого в тексте книги, на время современных машин (приблизительно 1960 года) нужно поделить его на 10.

Р. Беллман, С. Дрейфус
**Прикладные задачи динамического
программирования**

М., 1965 г., 460 стр. с илл.

Редактор *А. А. Корбут*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно*
Корректор *Т. Д. Доверман*

Сдано в набор 4/VIII 1964 г. Подписано к печати
12/I 1965 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 14,33.
Усл. печ. л. 23,58. Уч.-изд. л. 21,37. Тираж 9000 экз.
Цена книги 1 р. 27 к. Заказ № 1198.

Издательство «Наука».

Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор»
имени А. М. Горького «Главполиграфпрома» Государ-
ственного комитета Совета Министров СССР по пе-
чаги, Гатчинская, 26.